

О различиях в закономерностях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на плоской, цилиндрической и сферической заряженных поверхностях раздела сред

* А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, В. А. Коромыслов

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, * e-mail: grig@uniyar.ac.ru*

Поступила в редакцию 06.03.2020

После доработки 17.04.2020

Принята к публикации 24.04.2020

Исследуются особенности реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на заряженной границе раздела идеальная проводящая жидкость – идеальная диэлектрическая среда при геометрически различных границах раздела: плоской, цилиндрической и сферической. Отмечено, что для плоской границы раздела в области ее устойчивости каждому волновому числу соответствуют две волны с различными частотами, бегущие в одном направлении. С увеличением скорости разность частот уменьшается, а в момент реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (в области неустойчивости) она обращается в ноль, и появляется волна, амплитуда которой экспоненциально нарастает со временем. Для цилиндрической границы раздела ситуация такая же, но имеются различия, связанные с наличием азимутальной симметрии волн. В случае сферической границы раздела такого эффекта нет, смена режимов существования волн другая: колебательная неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца реализуется при попарном взаимодействии мод и при дальнейшем увеличении скорости она сменяется аperiodической неустойчивостью. Общая же картина реализации неустойчивости существенно сложнее. Предполагается, что причина такого различия реализации неустойчивости связана с конечностью площади поверхности сферы и ее безграничностью в одном измерении для цилиндрической границы раздела и в двух взаимно перпендикулярных направлениях для плоскости.

Ключевые слова: идеальная электропроводная жидкость, диэлектрическая среда, электрический заряд, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

УДК 532.69

DOI: 10.5281/zenodo.4455839

ВВЕДЕНИЕ

В разнообразных задачах технической физики, геофизики и технологии приходится сталкиваться с движением одной среды относительно другой [1–13]. Данное явление вызывает неизменный интерес, поскольку реальные ситуации, когда внешняя среда отсутствует, достаточно редки. При определенных условиях граница раздела двух сред, движущихся относительно друг друга, становится неустойчивой. Неустойчивость может быть вызвана комбинацией различных факторов: наличием электрического и (или) гравитационного полей, имеющимся зарядом на поверхности раздела, равномерным или неравномерным относительным движением среды, каким-либо периодическим внешним воздействием и т.д.

Рассмотрим простейший случай, когда среду можно моделировать идеальными жидкостями, они не смешиваются между собой, и одна среда движется с постоянной скоростью относительно другой. При этом на границе раздела наблюдается тангенциальный скачок поля скоростей, который при определенной величине приводит к

реализации периодической неустойчивости, названной неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца [1–4].

Большинство задач, связанных с данным типом неустойчивости, можно свести к трем основным геометрически заданным поверхностям раздела.

I. Плоскость. В качестве среды выступают два полубесконечных пространства, разделенных плоскостью, либо одна из сред задана слоем конечной толщины. Как правило, в таких задачах речь идет о поведении жидкости в поле силы тяжести. В качестве одного из параметров выступает отношение плотностей верхней и нижней сред. В зависимости от условий задачи отношения плотностей могут меняться в широких пределах: от значений много меньше единицы, когда одна из сред является газом, до значений, близких и даже больше единицы. В последнем случае существенную роль в развитии неустойчивости уже будет играть неустойчивость Рэлея-Тейлора.

II. Цилиндр. Для расчетов обычно принимают, что цилиндр бесконечный. В таких задачах речь

идет об эволюции во времени струи, и практически во всех случаях предполагается, что плотность струи много больше плотности среды, что закономерно, поскольку, как правило, речь идет о распаде струи в газовой среде или воздухе.

III. Сфера. Как и в случае с плоской поверхностью, отношение плотностей может меняться в широких пределах. При значениях отношения много больше единицы, когда одна из сред является газом, рассматривается эволюция либо пузыря в жидкой среде, либо капли в газовой среде. Отношение плотностей может быть близко к единице. В этом случае моделируется поведение жидкостей типа эмульсий. В большинстве задач рассматривается первый вариант. Модель, когда капля движется, для эмульсии довольно экзотический вариант, и движение можно объяснить, пожалуй, только наличием заряда на капле и внешнего электрического поля в среде.

Рассмотрим и сравним механизмы реализации неустойчивости для трех вышеописанных геометрических поверхностей. При решении задач дополнительно будем учитывать влияние внешнего однородного электростатического поля или заряда на поверхности раздела. Это необходимо для того, чтобы сравнить механизм реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца с хорошо изученным механизмом неустойчивости жидкости по отношению к собственному или индуцированному заряду (см., например, [3–4, 11–17]).

Для того чтобы оценить критические значения и тип неустойчивости, достаточно ограничиться линейным приближением при решении задач и получить дисперсионные уравнения, связывающие частоту осцилляций поверхности с другими параметрами задачи.

1. ПЛОСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Задача расчета частот колебаний и критических значений неустойчивости заряженной плоской, безграничной в двух взаимно перпендикулярных направлениях поверхности раздела двух движущихся относительно друг друга сред решалась не раз как в линейном [1–4], так и нелинейном [8] приближении.

Рассмотрим один из вариантов решения обсуждаемой задачи, доведя его до анализа дисперсионного уравнения и особенностей распространения возникающих на границе раздела волн и реализации их неустойчивости.

Математическая формулировка задачи. Рассмотрим две несмешивающиеся идеальные несжимаемые жидкости, верхняя из которых диэлектрическая с постоянной ε_* имеет плот-

ность ρ_1 и заполняет в поле сил тяжести \vec{g} полубесконечное пространство $z > 0$ ($\vec{g} \parallel -\vec{n}_z, \vec{n}_z$ – орт декартовой оси), а нижняя – идеально проводящая с плотностью ρ_2 заполняет полупространство $z \leq 0$. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризующейся коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что в верхней среде имеется электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0 \equiv E_0 \vec{n}_z$; это приводит к наличию на невозмущенной капиллярным волновым движением границе раздела сред электрического заряда, распределенного с постоянной плотностью $\kappa \equiv \varepsilon_* E_0 / 4\pi$. Пусть верхняя среда движется параллельно границе раздела с постоянной скоростью \vec{U}_0 вдоль орта \vec{n}_x . Примем, что k – волновое число; $\xi(x, t)$ – функция, описывающая малое отклонение границы раздела сред от равновесного в поле силы тяжести состояния $|\xi(x, t)| \ll 1$.

Проанализируем устойчивость капиллярно-гравитационных волн в описанной системе, полагая, что волновые течения жидкостей в верхней и нижней средах являются потенциальными с гидродинамическими потенциалами $\Psi_1(\vec{r}, t)$ и $\Psi_2(\vec{r}, t)$ соответственно, так что $\nabla \Psi_j(\vec{r}, t) = \vec{U}_j(\vec{r}, t)$ [4]. Принимая, что скорости гидродинамических движений жидкости много меньше скорости света в диэлектрической среде, электрическое поле в верхней среде будем считать электростатическим и описывать с помощью потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$ так, что $\vec{E} = -\nabla \Phi(\vec{r}, t)$ [14]. В итоге математическая формулировка задачи о расчете волнового движения в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей при наличии на границе раздела равномерно распределенного электрического заряда и тангенциального скачка поля скоростей запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_j(\vec{r}, t) &= 0, \quad j=1,2; \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad (1) \\ z \rightarrow \infty: \nabla \Psi_1(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{U}_0, \quad -\nabla \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}_0; \\ z \rightarrow -\infty: \nabla \Psi_2(\vec{r}, t) &\rightarrow 0; \\ z = \xi(x, t): (\partial F / \partial t) &= 0; \\ F(x, z, t) \equiv z - \xi(x, t) &= 0, \\ U_z^{(1)}(\vec{r}, t) &= U_z^{(2)}(\vec{r}, t); \\ \Phi = \Phi_s, -P_1(\vec{r}, t) + P_2(\vec{r}, t) + P_e(\xi) - P_\sigma(\xi) &= 0, \end{aligned}$$

Здесь $P_1(\vec{r}, t)$ и $P_2(\vec{r}, t)$ гидродинамические давления в первой и второй средах; $P_e \equiv E^2 / 8\pi$ и $P_c(\vec{r}, t) \equiv \sigma \times \text{div } \vec{n}$ давления на границу раздела электрических сил и сил поверхностного натяжения; $\vec{n} \equiv \nabla F(x, z, t) / |\nabla F(x, z, t)|$ – вектор нормали к границе раздела сред; $\Phi_s(t)$ – электростатический потенциал, постоянный в каждый момент времени вдоль границы раздела сред.

Искать решение будем в безразмерных переменных, в которых $\rho_2 = \sigma = g = 1$, $\rho_1 / \rho_2 \equiv \rho$, оставляя за всеми остальными величинами прежние обозначения.

Неизвестными функциями задачи являются $\xi(x, t)$, $\Phi_1(\vec{r}, t)$, $\Phi_2(\vec{r}, t)$ и $\Psi(\vec{r}, t)$. Будем искать решение сформулированной задачи в волновом виде:

$$\xi(x, t) = A \times \exp(ikx - i\omega t);$$

$$\Psi_1(x, z, t) = u \times x + B \times \exp(-kz) \times \exp(ikx - i\omega t);$$

$$\Psi_2(x, z, t) = C \times \exp(kz) \times \exp(ikx - i\omega t);$$

$$\Phi(x, z, t) = D \times \exp(-kz) \times \exp(ikx - i\omega t);$$

где k – волновое число; ω – частота. Подставим эти выражения в граничные условия, разложенные в окрестности невозмущенной границы раздела сред: $z = 0$, по степеням малого параметра $\varepsilon \equiv \xi \times \sqrt{\rho g / \sigma}$ [15], и, проводя решение задачи стандартными методами (см., например, [16]), найдем в первом порядке малости по указанному параметру неизвестные функции:

$$\xi^{(1)}(x, t) = \cos(kx - \omega t); \quad (2)$$

$$\Psi_1^{(1)}(x, z, t) = -\left(\frac{\omega}{k} - U_0\right) \exp(-kz) \times \sin(kx - \omega t);$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, z, t) = -\frac{\omega}{k} \times \exp(kz) \times \sin(kx - \omega t);$$

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = E_0 \times \exp(-kz) \times \cos(kx - \omega t).$$

Подставляя эти решения в динамическое граничное условие, получим дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^2 - \frac{2\rho U_0 k}{(1+\rho)} \omega + \frac{1}{(1+\rho)} \times \left[\rho U_0^2 k^2 + \frac{\varepsilon_* E_0^2 k^2}{4\pi} - (1+\rho)k - k^3 \right] = 0 \quad (3)$$

и частоты волн ω на поверхности раздела сред в зависимости от физических параметров задачи:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\rho \text{We}}{(1+\rho)}} k \pm \sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}} \left[(1-\rho)k + k^3 - (\text{We} + W)k^2 \right]; \quad (4)$$

$$W \equiv \frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}; \quad \text{We} \equiv \frac{\rho U_0^2}{1+\rho}.$$

Анализ. Несложно видеть, что из-за различия знаков перед радикалом в (4) две волны, определяемые (4), имеют различные фазовые скорости, но одинаковое направление движения. Волновое движение устойчиво, когда частоты вещественны, то есть подкоренное выражение в (4) больше нуля. При увеличении параметров W и We выражение под радикалом будет уменьшаться, а с ним уменьшается и разность частот, определяемых (4), и когда оно обратится в ноль, частоты волн сравниваются. Если же при дальнейшем изменении физических параметров системы выражение под радикалом в (4) станет отрицательным, то частота станет комплексной: $\omega \equiv \text{Re } \omega \pm i \text{Im } \omega$. Амплитуды волн, согласно (2), при суперпозиции $\exp[i(kx - \omega t)]$ и $\exp[-i(kx - \omega t)]$ убывают или возрастают по закону $\sim \exp[\mp t \times |\text{Im } \omega|]$ соответственно.

Таким образом, условие устойчивости произвольной волны, определяемой волновым числом k , имеет вид:

$$(W + \text{We}) < \frac{k^2 + 1 - \rho}{k}.$$

При $\rho < 1$ правая часть этого выражения имеет минимум при $k \equiv \sqrt{1-\rho}$. Очевидно, это наименее устойчивое волновое число, которому соответствует минимальное значение суммы параметров $(W + \text{We})$. Следовательно, для границы, разделяющей устойчивые и неустойчивые состояния, будем иметь:

$$(W + \text{We}) = 2\sqrt{1-\rho}. \quad (5)$$

При $(W + \text{We}) = 2\sqrt{1-\rho}$ становится неустойчивой волна с $k \equiv \sqrt{1-\rho}$. Если $(W + \text{We}) > 2\sqrt{1-\rho}$, становятся неустойчивы все волны с волновыми числами из диапазона $k_{\min} < k < k_{\max}$, где $k_{\min, \max}$ определяются из соотношения $(W + \text{We}) = \text{const} = (k^2 + 1 - \rho)k^{-1}$ точками пересечения прямой $(W + \text{We}) \equiv \text{const}$ с соответствующей кривой $(k^2 + 1 - \rho)k^{-1}$, постро-

енной при заданном ρ . Таким образом, неустойчивость имеет пороговый характер по $(W + We)$, определяемый отношением плотностей ρ . Инкременты неустойчивости $\gamma = \gamma(k, \rho)$ определяются модулем мнимой части частоты $|\text{Im}\omega|$.

С ростом ρ ширина диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам, расширяется, а при $(W + We) = 2$ и $\rho = 0$ вырождается в точку, лежащую на оси k . Расчеты показывают, что при $(W + We) \geq 3$ величина инкремента слабо снижается с ростом ρ , а при $(W + We) < 3$ величина инкремента увеличивается с ростом ρ . При уменьшении значения $(W + We) = \text{const}$, при котором строится зависимость $\gamma = \gamma(k, \rho)$, область реализации неустойчивости смещается в сторону больших значений ρ . Когда верхняя среда является вакуумом ($\rho = 0$), минимальное значение $(W + We)$, при котором возможна неустойчивость, равно 2, а при $\rho \rightarrow 1$ соответствующее минимальное значение $(W + We) \rightarrow 0$ (величина инкремента неустойчивости при этом стремится к нулю).

Параметры We и W имеют аддитивный характер, и любой из них можно принять равным нулю. Следовательно, получаем условия реализации неустойчивости типа Тонкса-Френкеля при $We = 0$ и $W \neq 0$ или Кельвина-Гельмгольца при $W = 0$, $We \neq 0$ в чистом виде. Для таких предельных ситуаций зависимости $\gamma = \gamma(k, \rho)$ будут иметь одинаковый вид, хотя феноменологии неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Тонкса-Френкеля совершенно различны. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является периодической – волна продолжает двигаться, экспоненциально во времени увеличивая свою амплитуду. Неустойчивость Тонкса-Френкеля является аperiodической – волна останавливается, а ее амплитуда экспоненциально увеличивается со временем (точки на поверхности жидкости совершают аperiodические движения).

Из (4) несложно заметить, что закономерности реализации неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца [1–4] и Тонкса-Френкеля [15, 17] различны. При отличной от нуля скорости внешней среды вне зависимости от других параметров всегда будет существовать положительная составляющая частоты:

$$\omega' = \sqrt{\frac{\rho We}{1 + \rho}} k, \quad (6)$$

которая будет давать либо аддитивный вклад в частоту при докритических значениях We и W (при положительном значении подкоренного выражения у радикала в (4)) либо определять

частоту при закритических значениях We и W (при отрицательном значении подкоренного выражения у второго корня). В итоге неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является периодической – волна продолжает двигаться, увеличивая свою амплитуду экспоненциально во времени.

Оценим величину ω' . Возьмем $k \equiv \sqrt{1 - \rho}$, а We выведем из (5), положив для определенности $W = 0$. Получим $We = 2\sqrt{(1 - \rho)}$. Отсюда

$$\omega' = \sqrt{\frac{2\rho(1 - \rho)}{1 + \rho}}.$$

При нулевой скорости внешней среды имеем неустойчивость Тонкса-Френкеля в чистом виде ($\omega' = 0$), которая является аperiodической – волна останавливается, а ее амплитуда экспоненциально увеличивается со временем.

К сказанному можно добавить, что при $\rho > 1$ даже при нулевых значениях We и W будет наблюдаться неустойчивость – неустойчивость Рэлея-Гейлора [18–20]: более тяжелая верхняя жидкость будет протекать в легкую.

Наиболее интересный результат проведенного анализа состоит в том, что наличие движения внешней среды приводит к тому, что развитие неустойчивости поверхности раздела сред при наличии тангенциального разрыва происходит колебательным образом.

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (СТРУЯ)

Пусть имеется безграничная вдоль выделенной оси заряженная цилиндрическая поверхность раздела двух несмешивающихся сред, одна из которых движется с постоянной скоростью вдоль оси симметрии. Будем исследовать устойчивость границы раздела. Реальным прототипом такой задачи является задача об устойчивости струи. Проблема распада струи на отдельные капли представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в технике и технологии (см., например, [10–12, 21]). Большинство экспериментальных исследований распада струй проводилось для струй, движущихся относительно газообразной среды [10–12, 21] в условиях возможности реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Ее краткому теоретическому анализу и посвящен следующий раздел. Изложение проведем по схеме [22].

Математическая формулировка задачи. Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости капиллярных волн на однородно заря-

женной с поверхностной плотностью заряда χ цилиндрической поверхности идеально проводящей несжимаемой струи идеальной жидкости радиуса R , с коэффициентом межфазного натяжения σ и плотностью ρ_2 , движущейся со скоростью $\vec{U}_0 \parallel \vec{e}_z$, где \vec{e}_z – орт продольной координаты, в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_1 и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи и движущейся со струей со скоростью \vec{U}_0 , в цилиндрических координатах, орт \vec{e}_z которой совпадает по направлению с \vec{U}_0 и осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_2 = \sigma = 1$, а цилиндрическая поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением:

$$F(r, z, \varphi, t) \equiv r - 1 - \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ – малое возмущение цилиндрической поверхности струи; φ – азимутальный угол.

Постановка задачи в общих чертах такая же, как для плоской поверхности, разве что принимаем отсутствие поля тяжести, чтобы горизонтально ориентированная струя не изгибалась. Кроме того, обозначим дополнительные условия: постоянство объема струи, приходящееся на одну длину волны λ :

$$\int_V dV = \pi\lambda;$$

$$V = \{0 \leq r \leq 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\};$$

и сохранение заряда на отрезке струи длиной λ :

$$-\int_S \frac{1}{4\pi} \vec{n} \times \nabla \Phi dS = 2\pi\chi\lambda;$$

$$S = \{r = 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

Так же, как и ранее, перейдем к гидродинамическим и электрическому потенциалам.

Решение всей задачи в линейном приближении по малому параметру (безразмерной амплитуде начального возмущения) будем искать в виде:

$$\xi(\varphi, z, t) = \alpha(t) \exp(ikz + im\varphi);$$

$$\psi_1(\vec{r}, t) = c(t) \exp(ikz + im\varphi) \times K_m(kr);$$

$$\psi_2(\vec{r}, t) = b(t) \exp(ikz + im\varphi) \times I_m(kr);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = a(t) \exp(ikz + im\varphi) \times K_m(kr), \quad (7)$$

где $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка m [23], m – азимутальный параметр. Кинематическое граничное условие и условие эквипотенциальности поверхности струи позволяют выразить неизвестные амплитуды $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ через амплитуду $\alpha(t)$ волн на границе раздела сред:

$$b(t) = \frac{\alpha'(t)}{kI'_m(k)};$$

$$c(t) = \frac{1}{kK'_m(k)} [\alpha'(t) - \alpha(t) ikU_0];$$

$$a(t) = \alpha(t) \frac{4\pi\chi}{K_m(k)}. \quad (8)$$

Подставляя проекты решений (7) с учетом (8) в динамическое граничное условие, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной амплитуды волн $\alpha(t)$:

$$\beta_m \times \alpha''(t) - 2i\delta_m \times \alpha'(t) + \kappa_m \times \alpha(t) = 0; \quad (9)$$

$$\beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} \equiv \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m};$$

$$\delta_m(k, U_0) \equiv k\rho U_0 h_m^{-1};$$

$$\kappa_m(k, \chi, U_0) \equiv \left[[1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)] - \text{We} \times k^2 h_m^{-1} \right];$$

$$h_m(k) \equiv m - \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv m + \frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$w \equiv 4\pi\chi^2; \quad \text{We} \equiv \rho U_0^2.$$

Решение уравнения (9) естественно искать в периодическом виде:

$$\alpha(t) \sim \exp(i\omega t),$$

где ω – частота капиллярных волн, в общем случае комплексная. Подставим это выражение в (9) и получим дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} \omega - \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0. \quad (10)$$

Решения дисперсионного уравнения имеют вид:

$$a_{2,1} = \frac{g_m k}{(\rho g_m - h_m)} \sqrt{\rho \text{We}} \pm \sqrt{\left[\frac{g_m k}{(\rho g_m - h_m)} \right]^2 \rho \text{We} + \frac{[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m - \text{We} \times k^2 g_m]}{(\rho g_m - h_m)}}. \quad (11)$$

Анализ. Видно, что структура дисперсионного уравнения такая же, как в случае с плоскостью. Некоторые различия обусловлены другим обезразмериванием и другой геометрией поверх-

ности раздела сред: в (10) входят цилиндрические функции, изменяющие роль параметра Вебера We и зарядового параметра W , которые теперь не входят в дисперсионное уравнение аддитивно. Но так же, как и в случае с плоскостью, имеем две волны, движущиеся в одном направлении вдоль струи с разными скоростями. При увеличении \vec{U}_0 разность скоростей уменьшается, и при определенном критическом значении \vec{U}_0 подрадикальное выражение в (11) обращается в ноль. При дальнейшем увеличении \vec{U}_0 подрадикальное выражение в (11) становится отрицательным и реализуется неустойчивость Кельвина-Гельмгольца.

Приравняв в (11) подкоренное выражение нулю, получим критическое условие реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца:

$$\rho k^2 We + \left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) \frac{h_m}{g_m} - k^2 We \times \frac{1}{g_m} \right] (\rho g_m - h_m) = 0.$$

Отсюда легко найти критическое для начала реализации неустойчивости значение параметра We :

$$We = \frac{[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m)] (\rho g_m - h_m)}{k^2}. \quad (12)$$

Из (12) несложно видеть, что с увеличением χ – поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред (или параметра w), критическая величина скорости стационарного движения U_0 (величина параметра Вебера) снижается. Интересно отметить, что о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца можно говорить для волн, различающихся азимутальной симметрией: осесимметричных ($m = 0$), изгибных ($m = 1$) и изгибно-деформационных ($m \geq 2$).

Таким образом, наличие движущейся параллельно струе среды приводит к возникновению колебательной неустойчивости волн различной симметрии на границе раздела сред, в том числе и того же типа, что для плоской границы раздела. Разнообразие проявления неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на цилиндрической границе раздела сред шире, чем на плоской. Помимо осесимметричной неустойчивости при $m = 0$, появляются изгибные ($m = 1$) и неосесимметричные неустойчивости ($m \geq 2$). Последние два типа наиболее интересны для ситуации, когда нужно получить факелообразный аэрозольный поток.

3. СФЕРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (КАПЛЯ)

Рассмотрим заряженную сферическую поверхность раздела двух несмешивающихся

сред и будем исследовать ее на устойчивость при поступательном движении с постоянной скоростью одной из сред. Физическим аналогом такой задачи является задача об устойчивости маленькой капли, движущейся в воздухе, которая рассматривалась экспериментально и теоретически (см., например, [6, 24]).

Математическая формулировка задачи. Пусть капля радиуса R идеальной несжимаемой электропроводной жидкости с плотностью ρ_2 и зарядом Q равномерно движется со скоростью \vec{U}_0 относительно идеальной диэлектрической среды с плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ^* , коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ . На границе раздела сред будет иметь место тангенциальный разрыв поля скоростей. Будем искать капиллярные осцилляции такой капли. Малым параметром задачи примем амплитуду осцилляций капли (границы раздела сред): $\epsilon \equiv |\xi| / R$.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре невозмущенной капиллярным волновым движением капли, в безразмерных переменных которых $R = \rho_2 = \sigma = 1$.

Тогда уравнение сферической границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, примет вид:

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Исследование проведем в линейном приближении по малому параметру ϵ .

Движения идеальной несжимаемой жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными, то есть примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле и среде определяются функциями потенциалов скоростей в капле $\Psi_2(\vec{r}, t)$ и среде $\Psi_1(\vec{r}, t)$ [3–4]. Также введем электростатический потенциал $\Phi(\vec{r}, t)$ [14].

Математическая постановка задачи такая же в общих чертах, как для цилиндрической поверхности. Дополнительные условия сформулируем в виде требований постоянства объема и заряда капли.

Решения такой задачи получим в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\vec{r}, t) &= \varphi(\vec{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-(n+1)} Y_n(\cos \theta) \exp(\omega t); \\ \Psi_2(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n Y_n(\cos \theta) \exp(\omega t); \\ \xi(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_n Y_n(\cos \theta) \exp(\omega t); \end{aligned} \quad (13)$$

где ω – частота, в общем случае комплексная; амплитуды разложений (13) A_n, B_n, Z_n – величины одного порядка малости; $\varphi(\vec{r})$ – потенциал скорости течения жидкости в окрестности невозмущенной сферической поверхности (решение соответствующей задачи несложно найти в [4, с. 42]); $Y_n(\cos\theta)$ – нормированные сферические функции n -го порядка [25].

Подставим (13) в кинематические условия на границе раздела для обеих сред и в динамическое граничное условие с учетом того, что капиллярное и электростатическое давления, будучи разложены по сферическим функциям, имеют вид:

$$P_\sigma(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+2) Z_n Y_n(\mu) \exp(\omega t);$$

$$P_E = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_*} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) Z_n Y_n(\mu) \exp(\omega t);$$

умножим на $Y_m(\cos\theta)$ и проинтегрируем по углу θ и в линейном приближении по малому параметру, получим систему трех однородных уравнений для нахождения коэффициентов разложений A_n, B_n, Z_n . Выражая из этой системы коэффициенты A_n и B_n через Z_n , получим бесконечную (для произвольных n) систему однородных алгебраических уравнений для отыскания амплитуд капиллярных осцилляций капли:

$$\begin{aligned} & We \times K_n Z_{n-2} - \sqrt{\rho We S} L_n Z_{n-1} + \\ & + \{\chi_n S^2 - We M_n + \gamma_n\} Z_n + \\ & + \sqrt{\rho We S} \times I_n Z_{n+1} + We J_n Z_{n+2} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$We \equiv \rho U^2; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\epsilon}; \quad K_n = \frac{9\alpha_n \alpha_{n-1}}{2n};$$

$$L_n = \frac{(9n+6)\alpha_n}{2n(n+1)}; \quad \chi_n = \frac{\rho}{(n+1)} + \frac{1}{n};$$

$$\gamma_n = (n-1)[n+2-W];$$

$$M_n = \frac{9\alpha_n \beta_{n-1}}{2n} + \frac{9\beta_n \alpha_{n+1}}{2(n+2)};$$

$$I_n = \frac{(9n+12)\beta_n}{2(n+1)(n+2)}; \quad J_n = \frac{9\beta_n \beta_{n+1}}{2(n+2)};$$

$$\alpha_n \equiv \frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}}; \quad \beta_n \equiv \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}.$$

Анализ. Необходимым и достаточным условием существования вышеуказанной системы однородных уравнений является обращение в ноль ее определителя, что и дает дисперсионное уравнение задачи:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \chi_2 - M_2 We + \gamma_2 & \alpha \sqrt{\rho We} L_2 & J_2 We & 0 \\ -\alpha \sqrt{\rho We} L_5 & \omega^2 \chi_3 - M_3 We + \gamma_3 & \alpha \sqrt{\rho We} L_3 & J_3 We \\ K_4 We & -\alpha \sqrt{\rho We} L_4 & \omega^2 \chi_4 - M_4 We + \gamma_4 & \alpha \sqrt{\rho We} L_4 \\ 0 & K_5 We & -\alpha \sqrt{\rho We} L_5 & \omega^2 \chi_5 - M_5 We + \gamma_5 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Ограничиваясь определителем 6×6 и рассчитывая зависимость от величины скорости обдувающего каплю потока воздуха вещественной и мнимой частей частоты, получим при $W = 0$ зависимости, приведенные на рис. 1а,б. Ситуация с $W \neq 0$ качественно аналогична приведенной на рис. 1а,б, лишь меняются диапазоны реализации неустойчивостей, смещаясь в сторону снижения критических скоростей.

Если пренебречь взаимодействием мод осцилляций капли, дисперсионное уравнение распадается на совокупность дисперсионных уравнений для каждой из мод:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \{M_n We - (n-1)[(n+2)-W]\} \left[\frac{n\rho}{(n+1)} + 1 \right]^{-1} \equiv \\ &\equiv \{M_n We + (n-1)W - (n-1)(n+2)\} \left[\frac{n\rho}{(n+1)} + 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

При варьировании физических параметров, входящих в (16), квадрат частоты может перейти через ноль, что означает появление неустойчивых решений. Границу такого режима можно найти, требуя обращения в ноль свободного коэффициента дисперсионного уравнения. Чтобы выполнить это условие в дисперсионном уравнении, положим равным нулю квадрат частоты, и получим уравнение бесконечного порядка (для произвольных n):

$$\begin{vmatrix} -M_2 We + \gamma_2 & 0 & J_2 We & 0 & \dots \\ 0 & -M_3 We + \gamma_3 & 0 & J_3 We & \dots \\ K_4 We & 0 & -M_4 We + \gamma_4 & 0 & \dots \\ 0 & K_5 We & 0 & -M_5 We + \gamma_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Чтобы его хоть как-то разрешить, воспользуемся методом последовательных приближений, рассматривая последовательно два, три, четыре уравнения системы, получая с соответствующими поправками условия обращения в ноль второй и третьей; второй, третьей и четвертой и т.д. частот мод осцилляций.

В пренебрежении взаимодействием мод осцилляций критические условия реализации неустойчивости n -й моды определяются простым аналитическим выражением (можно приравнять к нулю произвольный диагональный элемент в (17), а можно положить равной нулю частоту в (16)):

$$W + \frac{M_n We}{(n-1)} - (n+2) = 0. \quad (18)$$

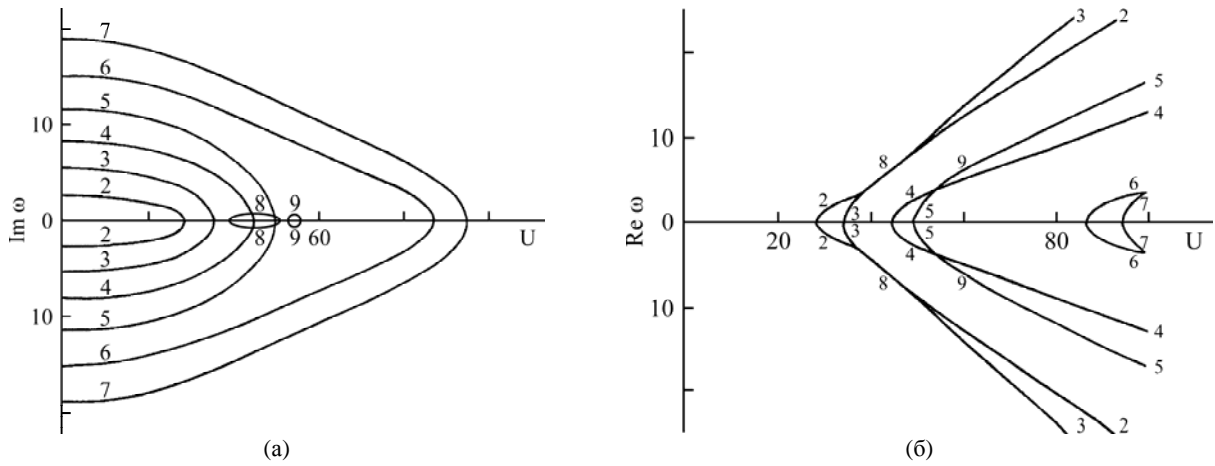


Рис. 1. Зависимость частоты осцилляций капли от величины безразмерной скорости обдувающего потока: (а) – мнимая часть частоты (частота); (б) – вещественная часть частоты (инкремент).

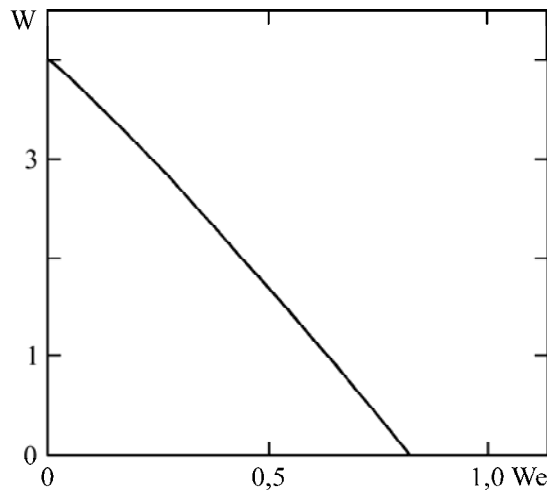


Рис. 2. Критическая зависимость между зарядовым параметром W , числом Вебера We .

Сравнение (18) с критическими условиями реализации неустойчивости на плоской (5) и цилиндрической (12) поверхностях показывает, что во всех случаях критическая зависимость параметров We и W линейная, хотя углы наклона критической прямой (в координатах We и W) и точки пересечения критических линий, описываемых соотношениями (5), (12) и (18), с координатными осями различны.

Если не пренебрегать взаимодействием мод, а сосчитать критическую кривую по (17), ограничиваясь определителем 6×6 , то она в координатах (W , We) примет вид, приведенный на рис. 2.

Решения дисперсионного уравнения для сферической поверхности при отсутствии взаимодействия между модами осцилляций элементарно находятся из (16), но при учете взаимодействия мод аналитическое решение выписать затруднительно, и решение проводится только численно, графически: см. рис. 1, на котором приведены результаты численного расчета дисперсионного уравнения (15) при учете шести первых строк определителя (15) для зависимости вещественной и мнимой компонент частоты от скорости обдувающего каплю потока.

Из рис. 1а,б видно, что при малых скоростях капиллярные осцилляции всех мод на сферической поверхности разрыва поля скоростей являются гармоническими и устойчивыми. Когда безразмерная скорость достигает величины $U \approx 28$, периодические осцилляции основной моды ($m = 2$) прекращаются, и реализуется их аperiodическая неустойчивость. При дальнейшем увеличении скорости до $U \approx 34$ прекращаются осцилляции, и реализуется неустойчивость третьей моды. Когда величина инкремента неустойчивости третьей моды сравнивается с величиной неустойчивости второй моды, реализуется периодическая неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца с частотой, существенно меньшей частот второй и третьей мод в состоянии, далеком от критического (см. рис. 1а, ветвь 8). Инкремент этой неустойчивости приведен на рис. 1б (ветвь 8). С дальнейшим увеличением скорости режим периодической неустойчивости заканчивается и неустойчивости второй и третьей мод становятся аperiodическими, причем величина инкремента неустойчивости третьей моды превышает величину инкремента второй моды (уже из выражения (16) видно, что величина

инкремента неустойчивости моды увеличивается с ее ростом):

$$\text{Im}\omega = \sqrt{\{(n-1)(n+2) - M_n \text{We} - (n-1)W\} \left[\frac{n\rho}{(n+1)} + 1 \right]^{-1}}.$$

Качественно схожим образом с увеличением скорости происходит изменение четвертой и пятой мод, шестой и седьмой и т.д. (см., например, рис. 1а,б).

При $W = 0$ и отсутствии взаимодействия мод условие появления неустойчивых решений принимает вид:

$$\text{We} = \frac{(n-1)(n+2)}{M_n}.$$

Но если сравнивать дисперсионные уравнения для плоской, цилиндрической и сферических поверхностей, то видно, что (3) и (10) структурно похожи между собой, а (15) от них существенно отличается. И речь идет не о форме представления, а о физико-математическом смысле. Уравнения (3) и (10) содержат вторую, первую и нулевую степени частоты. А любое дисперсионное уравнение, получающееся из (15) (в различных порядках приближений), содержит различные степени квадрата частоты. Например, при раскрытии определителя 3×3 на базе (15) получим дисперсионное уравнение типа:

$$a_3 \omega^6 + a_2 \omega^4 + a_1 \omega^2 + a_0 = 0;$$

а при раскрытии определителя $m \times m$:

$$a_m \omega^{2m} + a_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0;$$

где a_m – коэффициенты, зависящие от физических параметров. Вышесказанное означает, что решения типа (4) или (11) (в виде двух волн различной частоты) из (15) не получатся ни в каких приближениях. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на сферической поверхности проявляется иначе, чем на плоской и цилиндрической. По-видимому, это связано с конечностью площади поверхности сферы и бесконечностью плоской и цилиндрической поверхностей, по крайней мере, в постановках соответствующих задач [1–4, 15–17]. Во всех случаях на тангенциальном разрыве волны, им порожденные, появляются пары, но на плоской и цилиндрической поверхностях эти волны имеют одно направление движения и разные частоты, а на сферической поверхности тангенциального разрыва бегущие волны, соответствующие одной моде, имеют одинаковые частоты и противоположно направленные скорости. При сложении таких бегущих волн получаем стоячие волны. Как бы то ни было, но на

сферической поверхности образуются стоячие волны, а на плоской и цилиндрической имеем бегущие волны.

Интересно отметить роль плотности поверхностного заряда в реализации неустойчивости поверхности раздела сред. Согласно соотношениям (5), (12) и (18), критические условия реализации неустойчивости поверхности раздела сред зависят от We и W линейно. Для реализации неустойчивости линейная суперпозиция We и W должна превысить некоторое фиксированное при заданных физических параметрах значение. Собственно говоря, безразмерные параметры представляют собой соответственно отношение аэродинамического давления к капиллярному давлению и отношение электрического давления к капиллярному (для невозмущенных поверхностей капли, струи и плоской границы раздела сред). И аэродинамическое давление, и электрическое действуют в одном направлении: в сторону, противоположную капиллярному. Грубо говоря, неустойчивость границы раздела реализуется, когда суперпозиция аэродинамического и электрического давлений превысят капиллярное.

В крайних точках на плоскости (We , W) реализуются чистая периодическая неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (при $\text{We} \neq 0$ и $W = 0$) и на противоположном конце – чистая аperiodическая неустойчивость Тонкса-Френкеля (при $\text{We} = 0$ и $W \neq 0$). Собственно говоря, периодическая неустойчивость реализуется на множестве точек, составляющих линию типа изображенной на рис. 2, и только в одной единственной точке на левом конце линии реализуется аperiodическая неустойчивость Тонкса-Френкеля. Для того чтобы реализовалась колебательная неустойчивость границы раздела сред, необходимо чтобы $\text{We} \neq 0$, а есть на границе раздела сред заряд или нет – несущественно. В реальных условиях для падающей капли $\text{We} \neq 0$, для струи $\text{We} \neq 0$, и над плоской поверхностью раздела сред, как правило, имеется поток второй среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При расчете закономерностей реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на заряженных поверхностях разрыва поля скоростей следует отдавать себе отчет в том, что от геометрии поверхности раздела может зависеть и результат. Следует учитывать ограниченность или безграничность поверхностей раздела сред, используемых в обсчитываемой модели (бегущие или стоячие

волны в ней получаются). Помимо изменения формы коэффициентов при изменении геометрических поверхностей, могут измениться и физические закономерности реализации неустойчивости, следующие из истолкования результатов обчетов идеализированных моделей (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца – сама идеализация как явление).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г., *Гидродинамика*. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Сретенский Л.Н., *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика*. Т.6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Дразин Ф., *Введение в теорию гидродинамической неустойчивости*. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
5. Ле Блон П., Майсек Л., *Волны в океане*, т. 2. М.: Мир, 1981. 366 с.
6. Гонор А.Л., Ривкинд В.Я., Динамика капли, *ВИНИТИ, Итоги науки и техники. Серия Механика жидкости и газа*, 1982, т. 17, с. 86.
7. Ентов В.М., Ярин А.Л., Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей, *ВИНИТИ, Итоги науки и техники. Серия Механика жидкости и газа*, 1984, т. 17, с. 112.
8. Кузнецов Е.А., Лушников П.М., Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, *ЖЭТФ*, 1995, т. 108, № 2, с. 614.
9. Захватаев В.Е., Длинноволновая неустойчивость двухслойного течения диэлектрических жидкостей в поперечном электростатическом поле, *Изв. РАН. МЖГ*, 2000, № 2, с. 45.
10. Eggers J., Willermaux E., Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, 2008, vol. 71, с. 1.
11. Cloupeau M., Prunet Foch B., Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes, *J. Electrostatics*, 1990, vol. 25, p. 165.
12. Jaworek A., Krupa A., Classification of the modes of EHD spraying, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
13. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д., Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости, *Изв. РАН. ФАО*, 2018, т. 54, № 2, с. 1.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика*. Т. 2. Теория поля, М.: Наука, 1962. 422 с.
15. Френкель Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
16. Григорьев А.И., Суханов С.А., Ширяева С.О., Об устойчивости волнового движения на заряженной границе раздела несмешивающихся жидкостей при наличии тангенциального скачка поля скоростей, *Изв. РАН. МЖГ*, 2012, № 4, с. 99.
17. Tonks L., A Theory of liquid surface rupture by uniform electric field, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, p. 562.
18. Clark D.S., Tabak M., Nonlinear Rayleigh-Taylor growth in converging geometry, *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, no. 5, p. 055302.1.
19. Goncharov V.N., Li D., Effect of temporal density variation and converging geometry on nonlinear bubble evolution in classical Rayleigh-Taylor instability, *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, no. 4, p. 046306.1.
20. Григорьев А.И., Федоров М.С., Суханов С.А., Нелинейный анализ неустойчивости Рэлея-Тейлора заряженной границы раздела сред, *Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Труды международной конференции, XIII Харитоновские тематические научные чтения*, 14–18 марта 2011 г., Саров, ФГУП Российский федеральный ядерный центр – всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 2011, 565–570.
21. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К., и др., *Монодиспергирование вещества: принципы и применение*. Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
22. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды, *ЖТФ*, 2011, т. 81, № 2, с. 16.
23. Абрамовиц М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
24. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Неустойчивость заряженной сферической капли, движущейся относительно среды, *ЖТФ*, 1999, т. 69, № 5, с. 7.
25. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К., *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 436 с.

Summary

Features of realization of instability of Kelvin-Helmholtz on the charged interface the ideal conducting liquid – the ideal dielectric environment are investigated at various interface geometry: flat, cylindrical, and spherical. It is noted that for a flat interface in the region of its stability to each wave number there correspond two waves with various frequencies running in one direction. With an increase in speed, the difference of frequencies decreases, and at the time of realization of instability of Kelvin-Helmholtz (in the region of instability), it became zero, and there appears one wave whose amplitude exponentially increases in time. For a cylindrical border, the situation is same, but there are distinctions connected with the existence of the azimuthal symmetry of waves. In case of a spherical interface, such effect is not present, the change of the modes of the existence of waves is different: the oscillatory instability like Kelvin-Helmholtz is implemented at the paired interaction of the modes, and at a further increase in speed, it is replaced by a periodic instability, however, the general picture of the realization of instability is significantly more difficult. It is supposed that the reason of such distinction of the realization of instability is connected with the extremity of the surface area of the sphere and its infinity in one measurement for the cylindrical limit of the section and infinity in two mutually perpendicular directions for the flat one.

Keywords: ideal conductive liquid, dielectric environment, electric charge, Kelvin-Helmholtz instability