Нелинейный анализ внутреннего резонансного взаимодействия неосесимметричных волн на поверхности струи, движущейся относительно среды, в коллинеарном электростатическом поле

А.И. Григорьев, Н.А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Изучена возможность реализации вырожденного внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия неосесимметричных капиллярных волн на поверхности струи, движущейся относительно среды коллинеарно внешнему однородному электростатическому полю. Показано, что для осесимметричных волн с азимутальным числом, равным единице и двойке, реализуется несколько различных резонансных ситуаций.

УДК 532.5:537.1:621.319.7

ВВЕДЕНИЕ

Ещё Рэлей в XIX веке [1] показал, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к длинным осесимметричным капиллярным волнам на её поверхности с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению kR<1, где R – радиус струи. Более короткие волны могут беспрепятственно распространяться по струе [2]. Неосесимметричные волны на незаряженной поверхности струи всегда устойчивы. Появление на струе электрического заряда приводит к возникновению неустойчивости и неосесимметричных волн, а также к расширению спектра неустойчивых осесимметричных волн в область более коротких длин волн [3–4]. Если струю жидкости поместить в продольное электростатическое поле, то, как показано в [5–8], оно увеличит устойчивость осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи за счет смещения правой границы области устойчивости в сторону более длинных волн. Наличие движения струи относительно несжимаемой диэлектрической среды приводит к дестабилизации как осесимметричных и изгибных, так и изгибно-деформационных волн на поверхности струи [9–11].

Явления стабилизации осесимметричных капиллярных волн продольным электростатическим полем и дестабилизации относительным движением в материальной внешней среде представляют значительный интерес из-за незавершенности физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально.

Упомянутые исследования линейны по безразмерной амплитуде волн. Тем не менее математический аппарат для проведения нелинейных исследований уже разработан [3, 6, 12]. По аналогии с [12] и проведём исследование внутреннего резонансного взаимодействия неосесиммметричных волн на поверхности струи, движущейся относительно среды, в коллинеарном электростатическом поле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть струя идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ε_{in} движется с постоянной скоростью $\vec{U}_0$ относительно идеальной несжимаемой диэлектрический среды плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_{ex}. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред – σ.

Задачу будем решать в цилиндрической системе координат, начало отсчёта которой связано с осью струи. Возмущенная колебаниями поверхность жидкости отклоняется от равновесной поверхности $r = R$ на величину ξ:

$$r = R + \xi(\varphi, z, t).$$

Решение станем искать в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Обозначения физических величин оставим прежние. Для решения задачи воспользуемся асимптотическим методом многих временных масштабов [3, 11].

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\partial_t \vec{U}_{ex} + (\vec{U}_{ex}, \nabla)\vec{U}_{ex} = -\frac{1}{\rho}\nabla P_{ex};\ \partial_t \vec{U}_{in} + (\vec{U}_{in}, \nabla)\vec{U}_{in} = -\nabla P_{in};$$

© Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Электронная обработка материалов, 2012, **48**(5), 86–92.

$$div\vec{U}_{ex}=0;\quad div\vec{U}_{in}=0;\quad div\vec{E}_{ex}=0;\quad div\vec{E}_{in}=0.$$
$$r\to 0:\quad \vec{U}_{in}\to 0;\quad \vec{E}_{in}\to 0;$$
$$r\to\infty:\quad \vec{U}_{ex}\to -\vec{U}_0;\quad \vec{E}\to\vec{E}_0;$$
$$r=R+\xi:\qquad \frac{dF}{dt}=0;\qquad F=r-R-\xi(\varphi,z,t);$$
$$U_{n_{ex}}=U_{n_{in}}=U_n;\quad E_{n_{ex}}=\frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}}E_{n_{in}};\quad E_{\tau_{in}}=E_{\tau_{ex}};$$
$$-P_{ex}+P_{in}+P_E-P_\sigma=0;\quad P_E=-\frac{\varepsilon_{in}}{8\pi}\left[E_{ex}^2-2E_{n_{ex}}^2\right]+\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi}\left[E_{in}^2-2E_{n_{in}}^2\right];\quad P_\sigma=div\,\vec{n}.$$

Здесь $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности; индексом «ex» отмечены величины, относящиеся к внешней среде, а индексом «in» – к струе.

Для дальнейшего перейдём к гидродинамическим и электростатическим потенциалам на основе соотношений:

$$\vec{E}_{ex}=-\left(\nabla\Phi_{ex}\right);\quad \vec{E}_{in}=-\left(\nabla\Phi_{in}\right);\quad \vec{U}_{ex}=\nabla\varphi;\quad \vec{U}_{in}=\nabla\psi.$$

Гидродинамические и электростатические потенциалы, давления и возмущения поверхности струи представим в виде разложений по малой безразмерной амплитуде капиллярных волн ε:

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\varepsilon^2\varphi^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);\quad \psi=\varepsilon\psi^{(1)}+\varepsilon^2\psi^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);$$
$$\Phi_{ex}=\Phi_{ex}^{(0)}+\varepsilon\Phi_{ex}^{(1)}+\varepsilon^2\Phi_{ex}^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);\quad \Phi_{in}=\Phi_{in}^{(0)}+\varepsilon\Phi_{in}^{(1)}+\varepsilon^2\Phi_{in}^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);$$
$$P_{ex}=P_{ex}^{(0)}+\varepsilon P_{ex}^{(1)}+\varepsilon^2P_{ex}^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);\quad P_{in}=P_{in}^{(0)}+\varepsilon P_{in}^{(1)}+\varepsilon^2P_{in}^{(2)}+O\left(\varepsilon^3\right);$$
$$\xi\left(\varphi,z,t\right)=\varepsilon\xi_1\left(\varphi,z,T_0,T_1\right)+\varepsilon^2\xi_2\left(\varphi,z,T_0\right)+O\left(\varepsilon^3\right).\tag{1}$$

Дифференцирование по времени будем проводить по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t}\equiv\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}.\tag{2}$$

Подставив разложения (1)–(2) в решаемую задачу, разобьём её по порядкам малости и найдём решения получившихся задач.

Задача нулевого порядка имеет решения

$$\varphi^{(0)}=U_0z;\quad \Phi_{ex}^{(0)}=-E_0z;\quad \Phi_{in}^{(0)}=-E_0z.$$

Отыскание решений первого порядка малости не представляет трудности и может быть проведено по схеме, подробно описанной в [3]. Оно ищется в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам:

$$\xi^{(1)}\left(\varphi,z,t\right)=\int_0^\infty\sum_{m=0}^\infty\alpha_m\left(t\right)\,\exp\left(im\varphi\right)\exp\left(ikz\right)dk;$$
$$\psi^{(1)}\left(\vec{r},t\right)=\int_0^\infty\sum_{m=0}^\infty G_m^{(1)}\left(t\right)I_m\left(kr\right)\exp\left(im\varphi\right)\exp\left(ikz\right)dk;$$
$$\varphi^{(1)}\left(\vec{r},t\right)=-Uz+\int_0^\infty\sum_{m=0}^\infty G_m^{(2)}\left(t\right)K_m\left(kr\right)\exp\left(im\varphi\right)\exp\left(ikz\right)dk;$$
$$\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)=-E_0z+\int_0^\infty\sum_{m=0}^\infty G_m^{(3)}\left(t\right)I_m\left(kr\right)\exp\left(im\varphi\right)\exp\left(ikz\right)dk;$$

$$\Phi_{ex}(\vec{r},t) = -E_0 z + \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(4)}(t)\, K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz)\, dk;$$

где i – мнимая единица; k – волновое число; m – азимутальный параметр; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно [13]; $\alpha_m(t)$ и $G_m^{(j)}(t)$ – зависящие от времени неизвестные амплитудные функции первого порядка малости.

Дисперсионное уравнение задачи получится в виде

$$-\omega^2 - \omega \frac{2\rho k U_0 g_m(k)}{\rho g_m(k) - h_m(k)} + \frac{g_m(k)}{1 - \rho \dfrac{g_m(k)}{h_m(k)}} \left(\frac{\rho k^2 U_0{}^2}{h_m(k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi} \frac{(\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})^2 k^2 E_0{}^2}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k))} - \left(1 - k^2 - m^2\right) \right) = 0;$$

$$h_m(k) \equiv \frac{k\, K_m'(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv \frac{k\, I_m'(k)}{I_m(k)}$$

и будет иметь решения

$$\omega_1 = kU_0 \gamma_m(k) + \sqrt{k^2 U_0{}^2 \gamma_m{}^2(k) + 4\omega_0(m,k)};$$

$$\omega_2 = kU_0 \gamma_m(k) - \sqrt{k^2 U_0{}^2 \gamma_m{}^2(k) + 4\omega_0(m,k)}; \quad \gamma_m(k) \equiv \frac{\rho g_m(k)}{\rho g_m(k) - h_m(k)};$$

$$\omega_0(m,k) \equiv \pm \sqrt{\frac{g_m(k) h_m(k)}{h_m(k) - \rho g_m(k)} \left(\frac{\rho k^2 U_0{}^2}{h_m(k)} + \frac{1}{4\pi} \frac{(\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})^2 k^2 E_0{}^2}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k))} - \left(1 - k^2 - m^2\right) \right)};$$

где ω – циклическая частота; $\rho \equiv \rho_{ex}/\rho_{in}$.

Во втором порядке малости перегруппируем слагаемые в уравнениях: потенциалы и функцию ξ перенесем влево, а всё остальное – вправо. В итоге получим неоднородную систему уравнений, в которой сгруппируем неоднородность по степеням экспонент:

$$\exp(-2i\omega_1 T_0), \quad \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi), \quad \exp(2i\omega_2 T_0), \quad \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi),$$

$\exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi]$, $\exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]$. Решения для потенциалов и функции ξ будем искать в виде

$$\psi^{(2)} = \big(A_1 \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi) + A_2 \exp(-2i\omega_1 T_0) + A_3 \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + A_4 \exp(2i\omega_2 T_0) +$$
$$+ A_5 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi] + A_6 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]\big) \exp(iLz)\, I_M(Lr);$$

$$\varphi^{(2)} = \big(B_1 \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi) + B_2 \exp(-2i\omega_1 T_0) + B_3 \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + B_4 \exp(2i\omega_2 T_0) +$$
$$+ B_5 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi] + B_6 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]\big) \exp(iLz)\, K_M(Lr);$$

$$\Phi_{in}{}^{(2)} = \big(C_1 \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi) + C_2 \exp(-2i\omega_1 T_0) + C_3 \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + C_4 \exp(2i\omega_2 T_0) +$$
$$+ C_5 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi] + C_6 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]\big) \exp(iLz)\, I_M(Lr);$$

$$\Phi_{ex}{}^{(2)} = \big(D_1 \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi) + D_2 \exp(-2i\omega_1 T_0) + D_3 \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + D_4 \exp(2i\omega_2 T_0) +$$
$$+ D_5 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi] + D_6 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]\big) \exp(iLz)\, K_M(Lr);$$

$$\xi^{(2)} = \big(\alpha_1 \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi) + \alpha_2 \exp(-2i\omega_1 T_0) + \alpha_3 \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + \alpha_4 \exp(2i\omega_2 T_0) +$$
$$+ \alpha_5 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1) + iM\varphi] + \alpha_6 \exp[iT_0(\omega_2 - \omega_1)]\big) \exp(iLz);$$
$$L \equiv 2k; \;\; M \equiv 2m.$$

Подставим решения нулевого и первого порядка в левые части уравнений полученной неоднородной системы и сгруппируем результат по экспонентам с различными показателями. Разбивая для каждого A_j, где $j \equiv 1; 2;\ldots 6$, полученную систему на отдельные системы при экспонентах с различными показателями степени, получаем шесть уравнений (по числу экспонент разных видов и неизвестных коэффициентов A_j , B_j и т.д.):

$$M = A_j M_j;$$

где M и M_j – матрицы. Решать получившиеся уравнения будем методом Крамера:

$$A_j = \frac{Det(M)}{Det(M_j)}. \tag{3}$$

Здесь $Det(M_1)$ – определитель матрицы M, в которой первый столбец заменен на стоящий справа столбец функции неоднородности. Решения для коэффициентов B_1, C_1, D_1 и α_1 находятся аналогично. Коэффициент A_1 соответствует экспоненте $\exp(-2i\omega_1 T_0 \mid +iM\varphi)$, аналогично:

$$A_2 \to \exp(-2i\omega_1 T_0);$$
$$A_3 \to \exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi);$$
$$A_4 \to \exp(2i\omega_2 T_0);,$$
$$A_5 \to \exp[-iT_0(\omega_1 - \omega_2) + iM\varphi];$$
$$A_6 \to \exp[-iT_0(\omega_1 - \omega_2)].$$

Определитель M_1 после упрощения примет вид

$$Det(M_1) = H_1 \cdot J_1 \equiv H_1 \cdot \left[\omega_1(M,L) - 2\omega_1(m,k)\right]\left[2\omega_1(m,k) + \omega_2(M,L)\right];$$

где $\omega_1(0,L)$, $\omega_2(0,L)$ – частоты волн второго порядка малости, $\omega_1(m,k)$ – частота волны первого порядка малости.

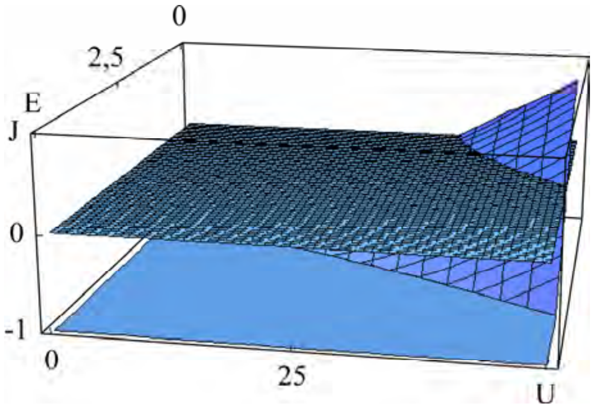
Выпишем с точностью до нерезонансных сомножителей определители матриц, стоящих в уравнениях слева:

$$\begin{gathered}
Det(M_2) = H_2 \cdot J_2 \equiv H_2 \cdot \left[\omega_1(0,L) - 2\omega_1(m,k)\right]\left[2\omega_1(m,k) + \omega_2(0,L)\right];\\
Det(M_3) = H_3 \cdot J_3 \equiv H_3 \cdot \left[\omega_2(M,L) - 2\omega_2(m,k)\right]\left[2\omega_2(m,k) + \omega_1(M,L)\right];\\
Det(M_4) = H_4 \cdot J_4 \equiv H_4 \cdot \left[\omega_2(0,L) - 2\omega_2(m,k)\right]\left[2\omega_2(m,k) + \omega_1(0,L)\right];\\
Det(M_5) = H_5 \cdot J_5 \equiv H_5 \cdot \left[\omega_1(M,L) - \Omega(m,k)\right]\left[\Omega(m,k) + \omega_2(M,L)\right];\\
Det(M_6) = H_6 \cdot J_6 \equiv H_6 \cdot \left[\omega_1(0,L) - \Omega(m,k)\right]\left[\Omega(m,k) + \omega_2(0,L)\right];\\
\Omega(m,k) \equiv \omega_1(m,k) - \omega_2(m,k).
\end{gathered} \tag{4}$$

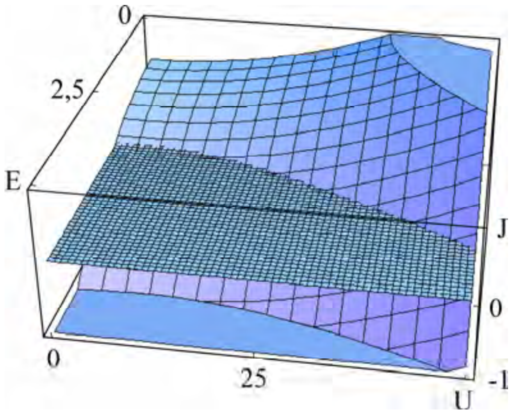
Полученные определители стоят в знаменателях выражений типа (3). Если какой-либо из определителей обратится в ноль, соответствующая амплитуда колебаний будет стремиться к бесконечности. В теории колебаний это интерпретируется как резонансное взаимодействие волн.

Проанализируем с точки зрения наличия возможных резонансов знаменатель в (3), соответствующий резонансному взаимодействию волны частотой с индексом «один» с произвольной симметрией с удвоенным волновым числом. Как показывают расчеты, для неосесимметричных мод резонансных ситуаций при разумных значениях напряженности полей и скоростей движения среды (фиксируемых в экспериментах) нет ни для каких волновых чисел.

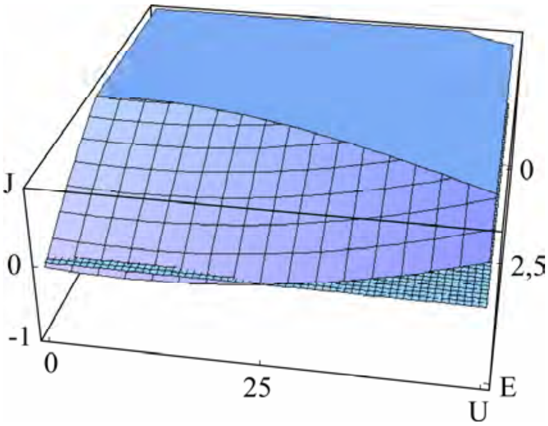
Для второго определителя $Det(M_2)$ для изгибной моды ($m = 1$) резонансная ситуация для $k = 1$ имеет место при больших скоростях ($U \geq 35$) и слабых полях ($E < 2{,}5$), как это видно из рис. 1,*а*. С увеличением волнового числа граница резонанса смещается в область меньших значений скорости и больших напряженностей полей, как это можно видеть из рис. 1,*б*. При $k = 1{,}25$ резонансная кривая принимает вид, проиллюстрированный рис. 1,*в*. Для изгибно-деформационной волны с $m = 2$ при значениях напряженностей полей и скоростей движения струи, принятых при расчетах на рис. 1, резонансов не наблюдается.



а

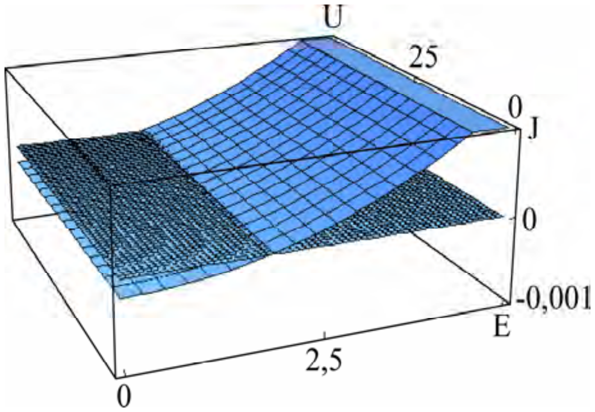


б

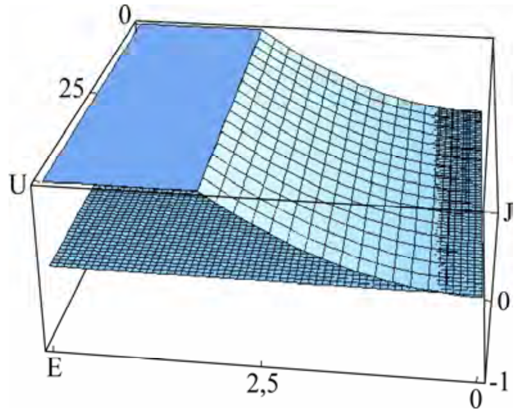


в

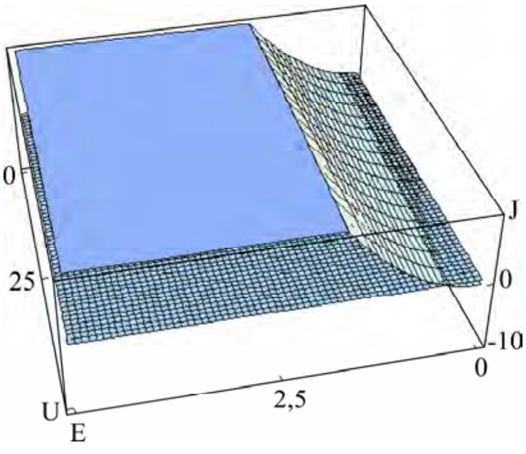
Рис. 1. Зависимость поверхности J_2 от безразмерных скорости U и напряженности внешнего коллинеарного струе поля E, рассчитанная при m = 1, ρ = 0,001, ε_{in} = 50, ε_{ex} = 1: k = 1 (а); 1,15 (б); 1,25 (в).



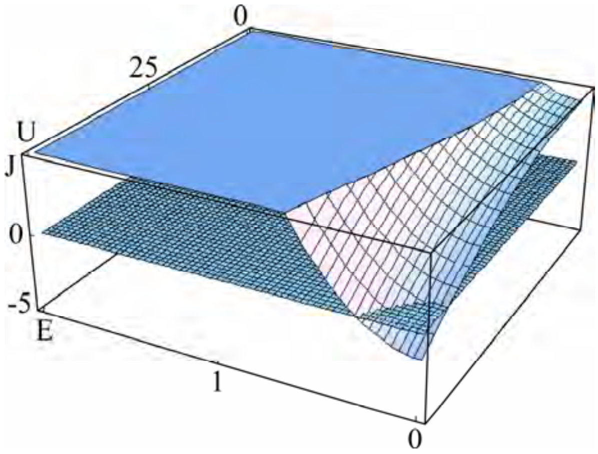
а



б

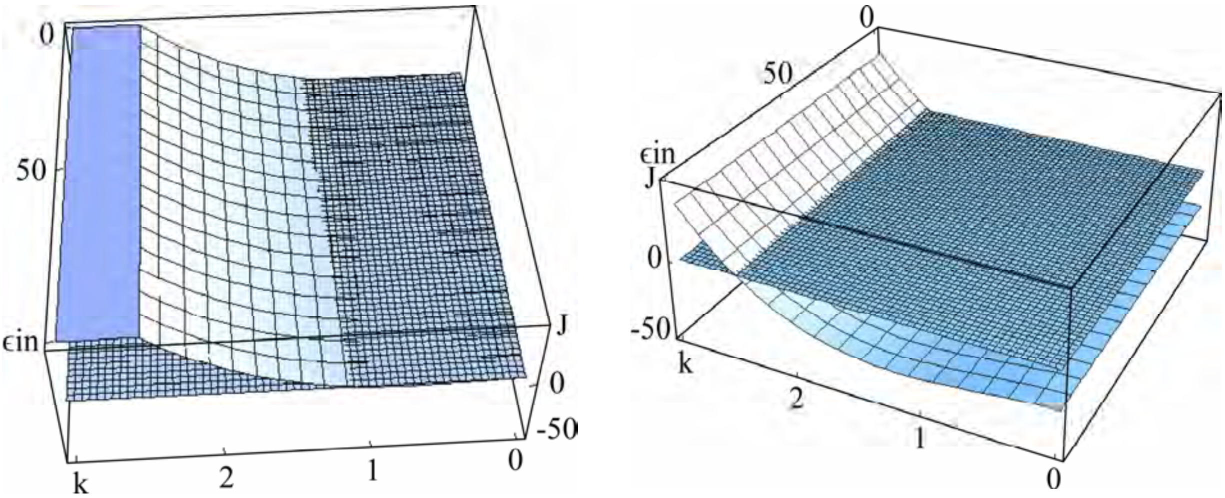


в



г

Рис. 2. Зависимость поверхности J_6 от безразмерных скорости U и напряженности внешнего коллинеарного струе поля E, рассчитанная при m = 1, ρ = 0,001, ε_{in} = 50, ε_{ex} = 1: k = 0,01 (а); k = 0,1 (б); 0,5 (в); 1 (г).



а *б*

Рис. 3. Зависимость поверхности J_1 от безразмерных волнового числа k и диэлектрической проницаемости струи ε_{in}, рассчитанная при $U = 5$, $E = 1$, $\rho = 0{,}001$, $\varepsilon_{ex} = 1$: $m = 1$ (а); 2 (б).

Третья резонансная ситуация определяется $Det(M_3)$ и аналогична первой.

Для исследования четвертой резонансной ситуации, когда волна с частотой с индексом «два» с произвольной симметрией резонансно взаимодействует с осесимметричной модой с удвоенным волновым числом, нужно проанализировать $Det(M_4)$ (см. (4)). В качественном отношении ситуация складывается такая же, как в уже проанализированном случае для второй резонансной ситуации $Det(M_2)$.

При исследовании пятого определителя $Det(M_5)$ резонансных ситуаций не обнаружено ни при каких значениях волнового числа как для изгибных, так и для изгибно-деформационных волн при значениях напряженностей полей и скоростей движения струи, принятых при расчетах на рис. 1.

Шестая резонансная ситуация определяется $Det(M_6)$ и соответствует взаимодействию осесимметричной волны частотой с индексом «1» и удвоенным волновым числом k с волной частотой $\omega_1(m,k)-\omega_2(m,k)$. Для изгибных волн ($m = 1$) со значением волнового числа $k = 0{,}01$ резонанс будет реализовываться при напряженности поля, примерно равной 2, и при любых скоростях, находящихся в диапазоне, установленном при расчете рис. 1. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 2,*а*. При увеличении волнового числа до $k = 0{,}1$ резонансная кривая смещается в область малой напряженности поля, как показано на рис. 2,*б*. При дальнейшем увеличении волнового числа до $k = 0{,}5$ и далее до $k = 1$ (рис. 2,*в*,*г*) кривая резонанса смещается в область больших скоростей. Резонанс между изгибно-деформационными волнами с $m = 2$ и осесимметричными качественно будет реализовываться так же, как для изгибных волн с $m = 1$.

На рис. 3 представлена зависимость условий реализации резонанса от волнового числа и диэлектрической проницаемости струи для неосесимметричных волн с $m = 1$ (рис. 3,*а*) и $m = 2$ (рис. 3,*б*), рассчитанных при фиксированных значениях напряженности поля и скорости движения струи в первой резонансной ситуации. Несложно видеть, что резонансы присутствуют для определённых длин волн и что положение резонанса слабо зависит от диэлектрической проницаемости струи.

Таким образом, внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие неосесимметричных волн при разумных значениях волновых чисел реализуется при достижимых в эксперименте напряженностях электростатического поля и скоростях спонтанного движения струи. Резонансное взаимодействие с участием изгибных волн реализуется при $k \sim 1$, а с участием изгибно-деформационных волн – при $k \sim 3$.

Работа выполнена при поддержке грантов: Рособрнауки № РНП 2.1.1/12895 и РФФИ № 09-08-00148.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On the Instability of Jets. *Proc. London Math.* Soc. 1878. **10**, 4–13.
2. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). *Теория звука*. Т.2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
3. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.

4. Kim O.V., Dunn P.F. Control Production by In-flight Electrospraying. *Langmuir*. 2010, **26**, 15807–15813.
5. Глонти Г.А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле. *ЖЭТФ*. 1958, **34**(5), 1328–1330.
6. Шутов А.А. Формирование и устойчивость заряженной струи в сильном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2006, (6), 52–67.
7. Ширяева С.О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(2), 47–51.
8. Ширяева С.О. Об устойчивости объёмно-заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном струе электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, (3), 57–68.
9. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces. *Phil. Mag*. 1892, **34**(5), 177–180.
10. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O., Petrushov N.A., Volkova M.V. Instability of the Lateral Surface of Strongly Charged Jets in a Collinear Flow of Material Environment. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(3), 218–222
11. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А. Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды. *ЖТФ*. 2011, **81**(2), 16–22.
12. Grigor'ev A.I., Voronina N.V., Shiryaeva S.O. Degenerated Internal Nonlinear Resonance Interaction of the Waves on the Surface of an Uncharged Dielectric Jet in a Longitudinal Electrostatic Field. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2011, **47**(3), 235–241.
13. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.

Поступила 22.12.11

Summary

A possibility was studied to realize an internal nonlinear resonance interaction of nonaxisymmetrical waves on a surface of a jet which is moving in a medium collinear to a longitudinal electric field. For axisymmetrical waves with the azimuthal number equal to one and two several resonance situation were realized.