А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАПИЛЛЯРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ВЯЗКОЙ КАПЛИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Несмотря на ряд публикаций, посвященных теоретическому исследованию капиллярных колебаний и устойчивости заряженных капель, выполненных как в линейной, так и в нелинейной постановке (см., например, [1-6] и указанную там литературу), до сих пор проблема влияния вязкости на физические характеристики капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли понятна лишь на качественном общефизическом уровне. Это связано с тем обстоятельством, что бóльшая часть исследований, относящихся к вязким каплям, была выполнена численно и не содержит аналитических зависимостей, которые можно было бы использовать при более глубоком теоретическом анализе. В этой связи целесообразно выписать хотя бы аппроксимационные аналитические формулы для основных физических характеристик капли по результатам численных расчетов. Такие формулы могут быть использованы при качественном физическом анализе.

1. Пусть дана сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν, на поверхности которой существуют капиллярные волны бесконечно малой амплитуды, возникающие уже вследствие теплового движения молекул жидкости и приводящие к деформации равновесной сферической поверхности $\xi(\theta, \varphi, t)$. Пусть жидкость является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε и имеет однородное по объему распределение заряда с плотностью δ. Полный заряд капли Q. Окружающая среда – вакуум. Дисперсионное уравнение для капиллярных движений жидкости в описанных условиях получено в [7] и в безразмерных переменных, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$ имеет вид

$$s^2 + 2(n-1)\left[(2n+1) - n(n+2)\frac{2}{x}f_n(x)\right]\left(1 - \frac{2}{x}f_n(x)^{-1}\right)\nu s + s_0^2 = 0, \tag{1}$$

$$f_n(x) \equiv i_{n+1}(x)/i_n(x), \qquad x \equiv (s/\nu)^{1/2}, \qquad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3},$$

$$s_0^2 = n\cdot(n-1)\cdot(n+2) - 4n\cdot(n-1)\frac{(\varepsilon-1)^2 n + 5\varepsilon + 1}{\varepsilon(\varepsilon\cdot n + n + 1)}W,$$

где $s = Re\, s + iIm\, s$ – комплексная частота, i – мнимая единица; n – номер моды капиллярных колебаний; σ – коэффициент поверхностного натяжения; $i_n(\zeta)$ – модифицированные сферические функции Бесселя первого рода от комплексного аргумента, определяемые соотношением

$$i_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} I_{n+1/2}(\zeta) = \begin{cases} exp(-0{,}5n\pi i)\cdot j_n(\zeta\cdot exp(0{,}5\pi i))\ при\ (-\pi < arg\,\zeta \le 0{,}5\pi), \\ exp(1{,}5n\pi i)\cdot j_n(\zeta\cdot exp(-1{,}5\pi i))\ при\ (0{,}5\pi < arg\,\zeta \le \pi), \end{cases}$$

$$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots,$$

где $j_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} J_{n+1/2}(\zeta)$ – сферическая цилиндрическая функция Бесселя первого рода от комплек-

© Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Электронная обработка материалов, 2000, № 1, С. 22–28.

сного аргумента, а $I_{n+1/2}(\zeta)$ и $J_{n+1/2}(\zeta)$ – модифицированная и простая функции Бесселя полуцелого порядка от комплексного аргумента, соответственно. W - параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду [2, 4]. Если заряд, находящийся на капле, превышает критический $W = W_{n^*}$ (при котором $s_0^2 = 0$), то частота n-й моды колебаний s_n становится мнимой и начинается экспоненциальный рост амплитуды n-й моды.

Поставим перед собой цель на основе выписанного дисперсионного уравнения исследовать влияние вязкости заряженной капли на величину декремента затухания и частоту ее капиллярных колебаний, а также на величину инкремента неустойчивости капли. В аналитической форме такие зависимости из дисперсионного уравнения (1) получить не удается. Поэтому попытаемся получить искомые аналитические зависимости путем аппроксимации результатов численного анализа.

2. На рис. 1,а приведены зависимости вещественной Re s = Re $s(\nu)$ и мнимой $Im\ s = Im\ s(\nu)$ компонент комплексной частоты z основной моды (n = 2) капиллярных колебаний капли от ее безразмерной вязкости ν, построенные при различных докритических значениях параметра Рэлея W. Вещественная компонента s определяет безразмерный декремент затухания капиллярных колебаний η, а мнимая – их частоту ω. На рис. 1,б те же зависимости, что и на рис. 1,а приведены в более крупном масштабе по вязкости. Из рисунков видно, что зависимость декремента затухания капиллярных колебаний η от вязкости ν линейная: (η/ν)=const, во всем диапазоне существования колебательного процесса. Лишь в области очень малых вязкостей ($\nu \le 0{,}05$) немного увеличивается константа в линейной зависимости (η/ν)=const. Угол наклона обсуждаемой зависимости слабо зависит от величины заряда капли (от величины параметра Рэлея W), снижаясь с увеличением заряда (с увеличением W).

Как показывают численные расчеты по дисперсионному уравнению (1), для всех мод капиллярных колебаний капли при малых вязкостях (для n = 2 при $\nu \le 0{,}01$–$0{,}03$ в зависимости от величины параметра W, см. рис. 1,б) декремент затухания хорошо описывается известным выражением [8]

$$\eta = \nu R^{-2}(n-1)(2n+1).$$

При больших вязкостях (для n = 2 при $\nu \ge 0{,}01$–$0{,}03$ в зависимости от величины параметра W) во всем диапазоне существования колебательного процесса зависимость декремента затухания η от вязкости ν и параметра W для основной моды может быть удовлетворительно аппроксимирована выражением

$$\eta = A\nu(1 + 0{,}1W). \qquad (2)$$

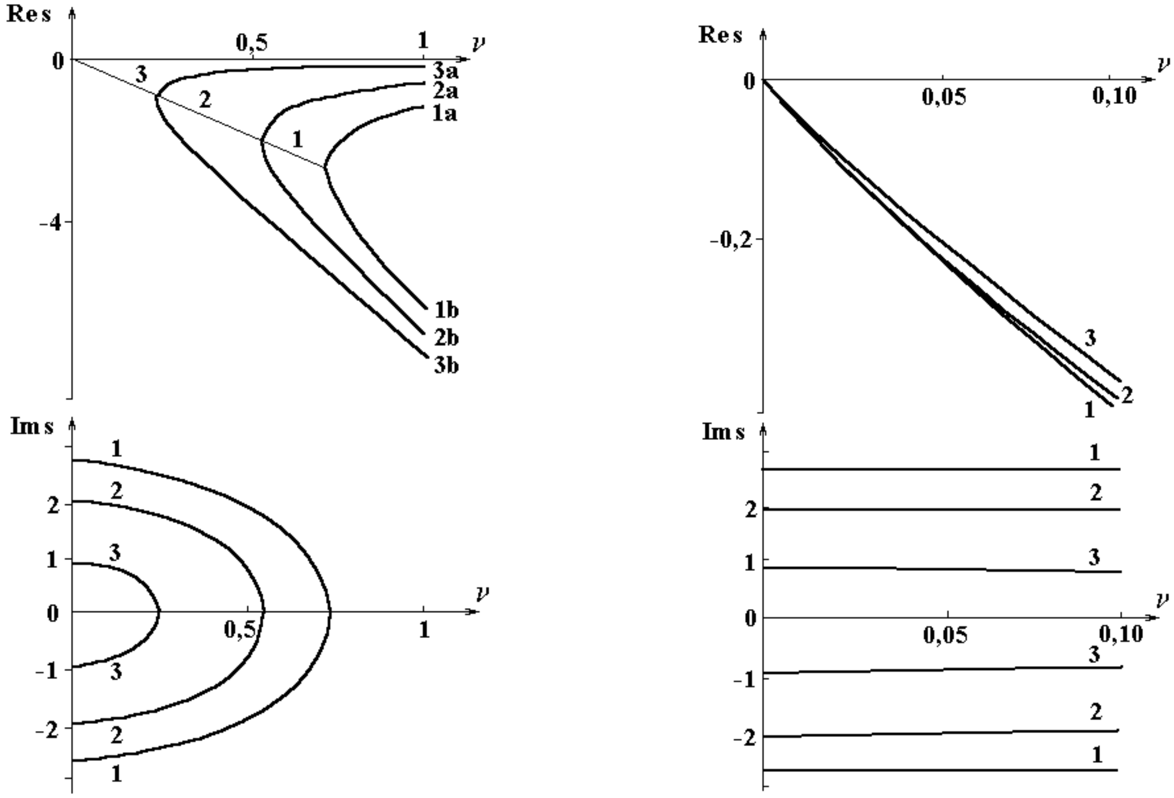
То есть появляется слабая зависимость декремента от величины заряда капли (от W). Величина константы A легко вычисляется по углу наклона зависимостей на рис. 1: $A \approx 3{,}4$. Отметим, что при $\nu \le 0{,}01$–$0{,}03$ (в зависимости от величины параметра W) величина константы больше: $A = 5$, что видно и из рис. 1,б.

Зависимость безразмерной частоты капиллярных колебаний заряженной капли от вязкости ν и параметра W во всем диапазоне существования колебательного процесса может быть удовлетворительно аппроксимирована выражением

$$Im\, s_c = Im\, s_0 (W_{2*} - W)^{1/2} \left[1 - \frac{\nu^2}{\nu_*^2 (W_{2*} - W)} \right], \qquad (3)$$

где $Im\ s_0$ – частота капиллярных колебаний основной моды незаряженной капли идеальной жидкости; ν_* – безразмерная вязкость капли, при которой в отсутствии на капле заряда (W = 0) исчезают периодические движения. Согласно результатам численных расчетов $\nu_* \approx 0{,}76$, а квадрат безразмерной частоты $(Im\ s_0)^2 = 8$. Несложно видеть, что зависимость частоты от вязкости при $\nu < 1$ появляется лишь во втором порядке приближений по ν, как и следует из общей теории.

На рис. 2 приведены зависимости $Re\ s = Re\ s(\nu)$ величины вещественной компоненты комплексной частоты s основной моды (n = 2) капиллярных колебаний сферической капли (величины инкремента неустойчивости γ_c) от ее безразмерной вязкости ν, построенные при различных закритических значениях параметра Рэлея W (при $W > W_{n*}$). Как можно судить по рис. 2, в закритической для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду области значений параметра W, зависимость величины инкремента неустойчивости γ_c от безразмерной вязкости ν и параметра W также можно описать аппроксимационной аналитической формулой



а *б*

Рис. 1. а – зависимости величины вещественной Re s = Re s(ν) и мнимой Im s = Im s(ν) компонент безразмерной комплексной частоты s основной моды (n = 2) капиллярных колебаний капли от ее безразмерной вязкости ν, построенные при докритических значениях параметра Рэлея W: 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 0,9; б – те же зависимости, что и на рис. 1,а, но в более крупном масштабе по вязкости.

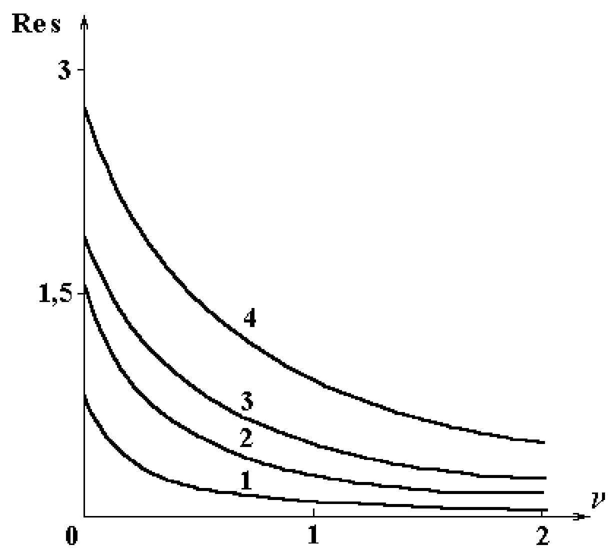


Рис. 2. Зависимости Re s = Re s(ν) величины вещественной компоненты комплексной частоты s основной моды (n = 2) капиллярных движений сферической капли от безразмерной вязкости ν, построенные при закритических значениях параметра Рэлея W: 1 – 1,1; 2 – 1,3; 3 – 1,5; 4 – 2.

$$\gamma_c = \frac{\gamma_0}{1+\nu\cdot k(W)}, \qquad k(W) = \left\lfloor 1+\frac{4}{W+1}+\frac{1}{2(W-1)}\right\rfloor, \tag{4}$$

где выражение

$$\gamma_0 = Im\, s_0 (W-1)^{1/2},$$

определяет инкремент неустойчивости капли идеальной жидкости. Очевидно, что вклад вязкости в величину инкремента определяется множителем

$$\frac{\gamma_c}{\gamma_0} = \left[1+\nu k(W)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Или же влияние вязкости на величину инкремента неустойчивости можно выразить в более привычных терминах в виде утверждения, что неустойчивое движение сильно заряженной сферической капли вязкой жидкости с инкрементом γ_0 затухает с декрементом η_c

$$\eta_c = \gamma_0 \left\{1-\frac{1}{1+\nu k(W)}\right\}. \tag{6}$$

При $\nu\, k(W)<1$, т.е. для асимптотической ситуации маловязкой капли выражение (4) для величины инкремента неустойчивости можно представить в виде

$$\gamma_c \approx \gamma_0 \left[1-\nu k(W)\right],$$

а выражение (6) для величины декремента затухания такого неустойчивого движения – в виде

$$\eta_c = \gamma_0 \nu k(W). \tag{6a}$$

3. Как известно [2, 4], у заряженной сферической электропроводной капли, несущей заряд чуть больший критического в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду, и претерпевшей неустойчивость, начинает экспоненциально нарастать амплитуда основной моды капиллярных колебаний, что соответствует вытягиванию капли в сфероид. Этот процесс сопровождается перераспределением заряда по поверхности капли с увеличением его поверхностной плотности у вершин и соответствующим возбуждением неустойчивости более высоких мод капиллярных колебаний капли. Как показано в [9], инкремент неустойчивости различных мод идеальнопроводящей капли γ_m будет зависеть как от величины параметра Рэлея W и безразмерной вязкости ν, так и от величины эксцентриситета сфероидальной капли (от степени удлинения капли), как это показано на рис. 3, где приведены зависимости величины инкремента γ_2 основной моды сфероидальной капли от квадрата ее эксцентриситета e^2, рассчитанные при фиксированном W и различных ν по полученному в [9] дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned}
& s\left[s^2+n(n-1)(n+2)\alpha_n\right]+2\nu\left\lfloor s^2(n-1)(2n+1)-\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\left(s^2+n(n-1)(n+2)\alpha_n\right)\right\rfloor-4\nu^2 n(n-1)(n+2)s\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)+ \\
& +e^2 æ_n\left\{s\left\lfloor\left(s^2+n(n-1)(n+2)\alpha_n\right)\left(2(n-1)+\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\right)-3\left((2n-1)(n+2)\alpha_n+n^3\right)\right\rfloor+\right. \\
& +2\nu\left\lfloor s^2\left(2n^3-8n^2+4n-10+\frac{9}{n}\right)+\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\times\right. \\
& \left.\times\left(s^2\left(2n^2-n+2+\frac{9}{n(n+1)}\right)+3\left(2n^2-n+3-\frac{6}{(n+1)}\right)(n+2)\alpha_n+3n^3\right)\right\rfloor+ \\
& \left.+4\nu^2 s\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\left[5n^3+5n^2+2n-\frac{18}{(n+1)}\right]\right\}=0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$æ_n \equiv \frac{n(n+1)}{3(2n-1)(2n+3)}, \qquad \alpha_n \equiv W_{n*}-\frac{4W}{(n+2)}.$$

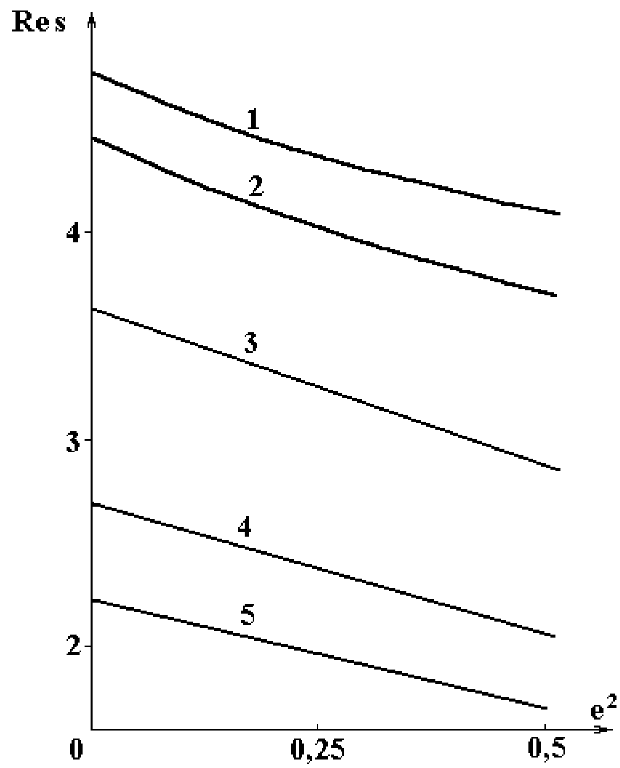


Рис. 3. Зависимости Re s = Re s(e^2) величины вещественной компоненты комплексной частоты s основной моды (n = 2) капиллярных движений сфероидальной капли от квадрата ее эксцентриситета e^2, рассчитанные при фиксированном W (W = 4) и различных значениях безразмерной вязкости ν: 1 – 0,03; 2 – 0,1; 3 – 0,36; 4 – 0,8; 5 – 1,2.

Выражение (7) так же, как и (1), приведено в безразмерном виде (когда $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$). Несложно видеть, что при $e^2 = 0$ уравнение (7) сводится к уравнению (1). Для идеальной жидкости (ν=0) дисперсионное уравнение (7) принимает вид:

$$s^2 = -\left\{ n(n-1)(n+2)\alpha_n - e^2\left[n^3 - (2n-1)(n+2)|\alpha_n|\right]\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \right\}. \qquad (8)$$

Когда выражение в фигурных скобках отрицательно, это соотношение определяет инкремент неустойчивости n-й моды заряженной проводящей сфероидальной капли идеальной жидкости. Из (8) легко видеть, что знак добавки к инкременту неустойчивости, связанной со сфероидальностью капли (то есть пропорциональной e^2), зависит от знака выражения, стоящего в квадратных скобках. Когда $n^3 > (2n-1)(n+2)|\alpha_n|$, что, например, при $W = 4$ выполняется для n<4, знак добавки отрицателен (множитель $|\alpha_n|$ определяет степень надкритичности заряда капли для каждой из мод). При выполнении противоположного соотношения, то есть для высоких мод, знак добавки положителен.

При малых закритичностях заряда (при малых величинах $|\alpha_n|$) выражение в квадратных скобках в (8) положительно, знак коэффициента при e^2 положителен, и инкремент растет с увеличением эксцентриситета. Такая ситуация реализуется, когда неустойчивость по отношению к собственному заряду претерпевает капля с предельным по Рэлею зарядом, например, во всех экспериментах по проверке критерия Рэлея (см. [2, 4, 10] и указанную там литературу), когда экспоненциальный рост капли начинается за счет тепловой флуктуации формы капли пропорциональной полиному Лежандра $P_2(\cos\theta)$ [11].

Зависимость инкремента неустойчивости основной моды капиллярных колебаний сфероидальной капли вязкой электропроводной жидкости γ_2 от вязкости ν и квадрата эксцентриситета e^2 при фиксированном значении параметра Рэлея (при $W = 4$) согласно рис. 3 в линейном по e^2 приближении можно аппроксимировать выражением вида

$$\gamma_2 = \gamma_c \left(1 - \frac{2}{1 + 0{,}8\nu} e^2 \right),$$

где γ_c определяется соотношением (4). При малой вязкости это выражение принимает форму

$$\gamma_2 \approx \gamma_0 \left[1 - \nu k(W)\right]\left[1 - 2e^2 (1 - 0{,}8\nu)\right].$$

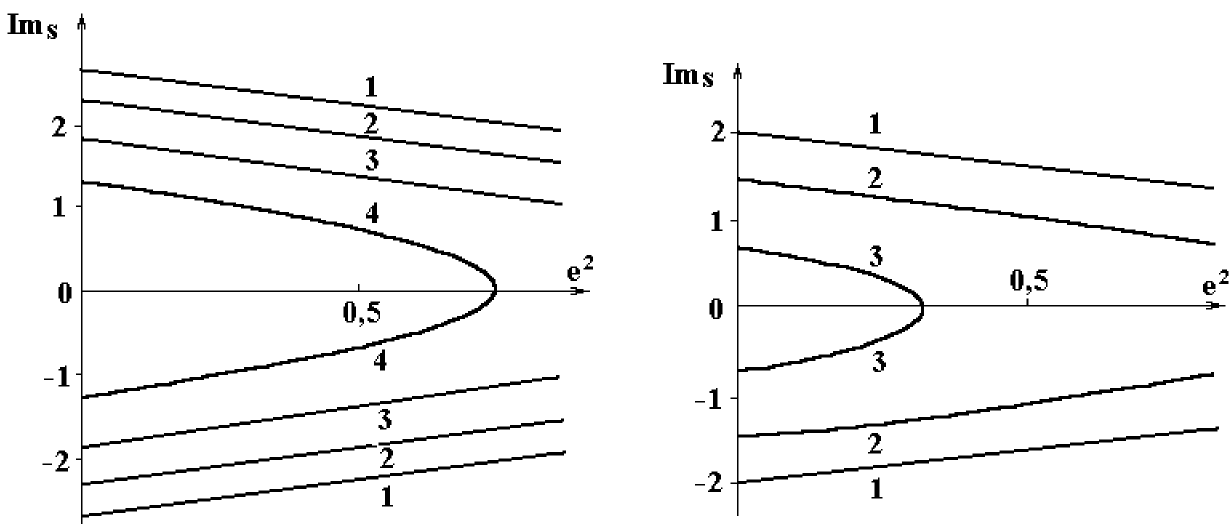
Отсюда для декремента затухания неустойчивого движения (см. (6)) основной моды капиллярных колебаний сфероидальной капли вязкой электропроводной жидкости несложно получить:

$$\eta_{cd} = \eta_c \left[1 - \frac{2}{1 + 0{,}8\nu} e^2 \right].$$

В приближении маловязкой капли это соотношение приведется к виду:

$$\eta_{cd} \approx \eta_c \left[1 - 2e^2 (1 - 0{,}8\nu)\right],$$

где η_c определено соотношением (6*а*).



а *б*

Рис. 4. а – зависимости Im s = Im s(ν) величины мнимой компоненты безразмерной комплексной частоты s основной моды (n = 2) капиллярных колебаний сфероидальной капли от квадрата эксцентриситета e^2 при фиксированном значении безразмерной вязкости ν = 0,1 и различных значениях параметра Рэлея W: 1 – 0; 2 – 0,25; 3 – 0,5; 4 – 0,75; б – зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4,а, рассчитанные при другом значении вязкости ν = 0,5 (W: 1 – 0; 2 – 0,25; 3 – 0,5).

Что касается физических характеристик капиллярных колебаний сфероидальной капли вязкой жидкости с докритическим по Рэлею зарядом, то с удлинением капли (с увеличением e^2) частоты и декременты падают по линейному (относительно e^2) закону, что представляется достаточно очевидным, поскольку само дисперсионное уравнение (7) получено в линейном по e^2 приближении. На рис. 4,а и 4,б приведены результаты численного расчета зависимости частоты капиллярных колебаний сфероидальной вязкой капли от квадрата эксцентриситета e^2 при различных значениях безразмерного заряда капли W и ее безразмерной вязкости ν. Зависимости, приведенные на рис. 4, можно аппроксимировать выражением вида

$$Im\, s = Im\, s_c \cdot \left[1 + (0{,}9 + \nu) W\right](0{,}6 + 0{,}5\nu),$$

где $Im\, s_c$ определено соотношением (3).

Для зависимости величины декремента незаряженной сфероидальной маловязкой капли от квадрата эксцентриситета e^2 в линейном по e^2 приближении в [12] получено аналитическое выражение

$$\eta = \eta_0 \left\{ 1 - e^2 \frac{4n^2 + 4n^3 + n^2 - 4n - 5}{3(2n-1)(2n+1)(2n+3)(n-1)} \right\},$$

где

$$\eta_0 = \frac{\nu}{\rho R^2}(n-1)(2n+1)$$

есть декремент затухания n-й моды капиллярных колебаний сферической капли маловязкой жидкости.

Сама тенденция уменьшения величины декремента с ростом сфероидальной деформации качественно согласуется с аналогичной аналитической же зависимостью, полученной в [13] для случая капиллярных колебаний незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsamopoulos J.A., Brawn R.A.* Resonant oscillations of inviscid charged drops // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
2. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // ЭОМ. 1990. № 6. С. 23–32.
3. *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* К расчету критических условий неустойчивости заряженной капли // Там же. 1994. № 5. С. 24–27.
4. *Григорьев А.И., Ширяе ва С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
5. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев О.А.* Неустойчивость заряженной сферической поверхности в обтекающем потоке идеальной жидкости // ЭОМ. 1998. № 1–2. С. 48–50.
6. *Feng Z.C.* Instability caused by coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
7. *Ширяева С.О., Муничев И.И., Григорьев А.И.* Волновые и вихревые движения жидкости в сильно заряженной капле // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 7. С. 1–8.
8. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л., 1947.
9. *Ширяева С.О.* Капиллярные колебания заряженной вязкой сфероидальной капли // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 4. С. 20–27.
10. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Закономерности рэлеевского распада заряженной капли // Там же. 1991. Т. 61. № 3. С. 19–28.
11. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной капли // Там же. 1995. Т. 65. № 9. С. 39–45.
12. *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Декремент затухания капиллярных колебаний слабосфероидальной капли // ПЖТФ. 1995. Т. 21. № 16. С. 17–21.
13. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of a drop in an electric field // Phys. Let. 1985. V. 112 A. № 11. P. 392–396.

Поступила 22.11.99

Summary

The approximate analytical relations of an increment and decrement from viscosity and charge for capillary oscillations heavily charged drop are derived on the basis of a numerical analysis of the dispersion equations for cases of spherical and spheroidal drop shapes.