

Нелинейные поправки к частотам волн на заряженной цилиндрической струе, движущейся относительно материальной среды

* А. И. Григорьев, Н. А. Петрушов, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступила 30.01.2017

После доработки 08.08.2017

Принята к публикации 21.08.2017

В асимптотических нелинейных расчетах третьего порядка малости по безразмерной амплитуде капиллярных волн найдено аналитическое решение задачи о расчете формы струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической материальной среды. Найдены нелинейные поправки к частотам для капиллярных волн произвольной симметрии и показано, что они в общем случае имеют комплексный вид, а вещественная их часть знакопеременна, но о их влиянии на критические условия реализации неустойчивости поверхности жидкости в рамках асимптотичности полученного решения говорить нельзя. Однако в области асимптотичности решения нелинейные поправки влияют на величины частот и инкрементов неустойчивости. Рассмотрен качественный вид частот, нелинейных поправок и инкрементов в зависимости от зарядового параметра и параметра Вебера.

Ключевые слова: заряженная струя, материальная среда, нелинейные поправки к частотам.

УДК 532.5.031

DOI: 10.5281/zenodo.3244403

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим влияние движения цилиндрической заряженной струи идеальной электропроводной несжимаемой жидкости относительно материальной диэлектрической среды, которую будем моделировать идеальной несжимаемой жидкостью, на устойчивость поверхности раздела сред, имеющей в такой системе тангенциальный разрыв поля скоростей. Исследование устойчивости границы раздела представляет интерес как в связи с многочисленными приложениями феномена диспергирования струи в технике и технологии [1–6], так и по чисто гносеологическим соображениям. Как объект исследования такая струя весьма интересна: в указанной системе одновременно могут реализовываться неустойчивости нескольких типов: изгибная [7], электростатическая Тонкса-Френкеля [8] (см. фотографии в [6]), а также Кельвина-Гельмгольца [9]. Взаимодействию различных видов неустойчивостей, качественному анализу нелинейных поправок к частотам волн на поверхности струи и их инкрементам и посвящено настоящее исследование.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об устойчивости капиллярных волн на однородно заряженной

(с поверхностной плотностью заряда χ , вызывающего на поверхности струи появление электрического поля с напряженностью $\vec{E} = 4\pi\chi\vec{e}_r$) цилиндрической поверхности струи радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, с коэффициентом межфазного натяжения σ и плотностью ρ_1 . Примем, что струя движется со скоростью \vec{U}_0 , параллельно \vec{e}_z (\vec{e}_z – орт продольной координаты), в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_2 и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии невозмущенной струи и движущейся со скоростью \vec{U}_0 . Введем цилиндрическую систему координат, орт \vec{e}_z которой сонаправлен \vec{U}_0 и оси симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи.

Все исследование проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_1 = \sigma = 1$. Примем, что поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением:

$$F = r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1;$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение цилиндрической поверхности струи $r = 1$, обусловленное капиллярным волновым движением; φ – азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
& r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t): \\
& \partial_t \bar{u}_1(\bar{r}, t) + (\bar{u}_1(\bar{r}, t), \nabla) \bar{u}_1(\bar{r}, t) = -\nabla p_1(\bar{r}, t); \\
& r > 1 + \xi(\varphi, z, t): \\
& \partial_t \bar{u}_2(\bar{r}, t) + (u(\bar{r}, t), \nabla) \bar{u}_2(\bar{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p_2(\bar{r}, t); \\
& \operatorname{div} u_1(\bar{r}, t) = 0; \operatorname{div} u_2(\bar{r}, t) = 0; \operatorname{div} \bar{E}(\bar{r}, t) = 0; \\
& r = 1 + \xi(\varphi, z, t): \frac{dF}{dt} = 0; \\
& (\bar{n}(\bar{r}, t), \bar{u}_1(\bar{r}, t)) = (\bar{n}(\bar{r}, t), \bar{u}_2(\bar{r}, t)); \\
& p_1(\bar{r}, t) - p_2(\bar{r}, t) + p_E(\bar{r}, t) - p_\sigma(\bar{r}, t) = 0; \\
& \Phi(\bar{r}, t) = \Phi_s(t); \\
& r \rightarrow 0: u_1(\bar{r}, t) \rightarrow 0; \\
& r \rightarrow \infty: \bar{u}_2(\bar{r}, t) \rightarrow -\bar{U}_0; \bar{E} \rightarrow 0; \quad (1) \\
& t = 0: \xi(z, \varphi, t) = \zeta_0 \exp(ikz + im\varphi) + (k.c.); \\
& \partial_t \xi(z, \varphi, t) = 0;
\end{aligned}$$

где ζ_0 – амплитуда начальной волновой деформации; k – волновое число; m – азимутальный параметр; $\rho \equiv \rho_2 / \rho_1$ – безразмерная плотность окружающей среды; аббревиатура к.с. означает: слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

В качестве дополнительных принимаются два условия: постоянства объема струи, приходящегося на длину волны $\lambda \equiv 2\pi / k$,

$$\int_V dV = \pi\lambda,$$

и сохранения заряда на отрезке струи протяженностью λ :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\bar{n}, \bar{E}) dS = 2\pi\chi\lambda,$$

$$S = \{r = 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

В сформулированной задаче $\bar{u}_j \equiv \bar{u}_j(r, \varphi, z, t)$ – поля скоростей течения жидкости в струе ($j = 1$) и в среде ($j = 2$), генерируемые волнами на поверхности раздела сред; $p_j \equiv p_j(r, \varphi, z, t)$ – гидродинамические давления в струе ($j = 1$) и среде ($j = 2$); $p_E(\bar{r}, t)$ – давление электрических сил; $p_E(\bar{r}, t) = E(\bar{r}, t)^2 / 8\pi$; $p_\sigma(\bar{r}, t)$ – давление сил поверхностного натяжения:

$p_\sigma(\bar{r}, t) = \sigma \cdot \operatorname{div} \bar{n}(\bar{r}, t)$ на границе раздела сред; $\bar{E}(\bar{r}, t) = -\vec{E}(\bar{r}, t) = -\nabla \Phi(\bar{r}, t)$, где $\bar{E}(\bar{r}, t)$ и $\Phi(\bar{r}, t)$ – напряженность и потенциал электрического поля; $\Phi_s(t)$ – потенциал поверхности струи; $\bar{n}(\bar{r}, t)$ – орт нормали к возмущенной поверхности струи.

В нижеследующем рассмотрении течения жидкости в струе и среде будем считать потенциальными:

$$\bar{u}_1(\bar{r}, t) = \nabla \psi_1(\bar{r}, t), \quad \bar{u}_2(\bar{r}, t) = -U_0 + \nabla \psi_2(\bar{r}, t)$$

с потенциалами скоростей $\psi_1(\bar{r}, t)$ и $\psi_2(\bar{r}, t)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи будем искать асимптотическим методом многих временных масштабов [10], выбирая в качестве малого параметра безразмерную амплитуду волны, заданной в начальный момент времени, $\varepsilon \sim \zeta_0$:

$$\begin{aligned}
& \psi_j(\bar{r}, t) = \varepsilon \psi_j^{(1)}(\bar{r}, t) + \varepsilon^2 \psi_j^{(2)}(\bar{r}, t) + \\
& \quad + \varepsilon^3 \psi_j^{(3)}(\bar{r}, t) + O(\varepsilon^4); \\
& p_j(\bar{r}, t) = p_j^{(0)} + \varepsilon p_j^{(1)}(\bar{r}, t) + \varepsilon^2 p_j^{(2)}(\bar{r}, t) + \\
& \quad + \varepsilon^3 p_j^{(3)}(\bar{r}, t) + O(\varepsilon^4); \\
& p_j(\bar{r}, t) = p_j^{(0)} + \varepsilon p_j^{(1)}(\bar{r}, t) + \varepsilon^2 p_j^{(2)}(\bar{r}, t) + \\
& \quad + \varepsilon^3 p_j^{(3)}(\bar{r}, t) + O(\varepsilon^4); \\
& \xi(\varphi, z, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\varphi, z, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\varphi, z, t) + \\
& \quad + \varepsilon^3 \xi^{(3)}(\varphi, z, t) + O(\varepsilon^4); \\
& \Phi(\bar{r}, t) = \Phi^{(0)} + \varepsilon \Phi^{(1)}(\bar{r}, t) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\bar{r}, t) + \\
& \quad + \varepsilon^3 \Phi^{(3)}(\bar{r}, t) + O(\varepsilon^4); \\
& \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4); \quad (2)
\end{aligned}$$

где $T_j \equiv \varepsilon^j t$ – временные масштабы, $j = 0; 1; 2$.

Разложения (2) подставим в систему (1). Все уравнения и граничные условия группируем по степеням ε , формируя задачи различных порядков малости. Задачи отыскания решений нулевого и первого порядков малости получаются однородными и мало отличаются по внешнему виду от исходных.

НУЛЕВОЙ ПОРЯДОК МАЛОСТИ

Решение задачи (1) нулевого порядка малости описывает равновесное состояние системы:

$$\Phi^{(0)} = -4\pi\chi \ln r; \quad p_1^{(0)} = p_0 - \frac{\rho}{2} \bar{U}_0^2 - 2\pi\chi^2 + 1;$$

$$p_2^{(0)} = p_0 - \frac{\rho}{2} \bar{U}_0^2; \quad (3)$$

которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . При записи потенциала, определяющего электрическое поле вблизи столба жидкости, принималось $\Phi_S^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи.

ПЕРВЫЙ ПОРЯДОК МАЛОСТИ

Решение задачи (1) в линейном по малому параметру приближении находится стандартными методами [9, 11] и имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(\vec{r}, t) &= \zeta(T_1) (\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)) \times \\ &\times \left(\frac{s_1}{s_1 - s_2} \exp[is_1 T_0 + ikz] + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \exp[is_2 T_0 + ikz] \right) + k.c.; \\ \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) &= 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \times \\ &\times \zeta(T_1) [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \times \\ &\times \left(\frac{s_1}{s_1 - s_2} \exp[is_1 T_0 + ikz] + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \exp[is_2 T_0 + ikz] \right) + k.c.; \\ \Psi_1^{(1)}(\vec{r}, t) &= i \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \frac{I_m(kr)}{k I_m'(k)} \times \\ &\times \zeta(T_1) [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \times \\ &\times \{ \exp[is_2 T_0 + ikz] - \exp[is_1 T_0 + ikz] \} + k.c.; \\ \Psi_2^{(1)}(\vec{r}, t) &= i \frac{K_m(kr)}{(s_1 - s_2) k K_m'(k)} \times \\ &\times \zeta(T_1) [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \times \\ &\times \{ s_1 (s_2 - kU_0) \exp[is_2 T_0 + ikz] - \\ &- s_2 (s_1 - kU_0) \exp[is_1 T_0 + ikz] \} + k.c.; \end{aligned} \quad (4)$$

где частоты $s_j \equiv s_{m,k}^{(j)} = b_{m,k} \mp \omega_0(m, k)$ определяются дисперсионным уравнением:

$$\begin{aligned} s_{m,k}^{(j)2} \pm \frac{2\gamma_m}{\beta_m} s_{m,k}^{(j)} + \frac{\kappa_m}{\beta_m} &= 0; \\ b_{m,k} \equiv \frac{\gamma_m}{\beta_m} &\equiv \frac{U_0 k \rho g_m}{h_m - \rho g_m}; \quad \beta_m(k) \equiv \frac{h_m - \rho g_m}{g_m h_m}; \\ \gamma_m(k, U_0) &\equiv \frac{k \rho U_0}{h_m}; \\ \kappa_m(k, \chi, U_0) &\equiv \\ &\equiv \left\{ [1 - m^2 - k^2 - 4\pi\chi^2 (1 + h_m)] - \rho U_0^2 k^2 h_m^{-1} \right\}; \\ h_m(k) &\equiv \frac{k K_m'(k)}{K_m(k)} \equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \end{aligned}$$

$$g_m(k) \equiv \frac{k I_m'(k)}{I_m(k)} \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$\omega_0(m, k) \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\left(\frac{k \rho U_0 g_m}{(\rho g_m - h_m)} \right)^2 + \frac{(1 - m^2 - k^2 - 4\pi\chi^2 (1 + h_m)) h_m g_m - \rho U_0^2 k^2 g_m}{(\rho g_m - h_m)}};$$

$s_{m,k}^{(j)}$ – комплексная частота капиллярной волны с волновым числом k и азимутальным параметром m ; $I_m(k)$ и $K_m(k)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m [12]; штрихом при функциях Бесселя обозначается ее производная по аргументу. Величина $b_{m,k}$ имеет смысл частоты волны, претерпевающей неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца, когда $\omega_0(m, k)$ становится мнимым. В свою очередь $\omega_0(m, k)$ в этом случае определяет инкремент нарастания амплитуды волны с частотой $b_{m,k}$. В случае же, когда $\omega_0(m, k)$ вещественно, то это часть полной частоты $b_{m,k} \mp \omega_0$.

Согласно дисперсионному уравнению каждому значению волнового числа k в результате наличия тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред можно сопоставить две волны с частотами, определяемыми решениями дисперсионного уравнения. С увеличением скорости струи или плотности ее заряда разность фазовых скоростей таких волн уменьшается и в момент потери этими волнами устойчивости в смысле Кельвина-Гельмгольца, когда подрадикальное выражение в $\omega_0(m, k)$ становится равным нулю, эти волны сливаются в одну.

Корни дисперсионного уравнения решаемой задачи легко выписываются:

$$\begin{aligned} s_{m,k}^{(1)} &= \frac{k g_m \sqrt{\rho \text{We}}}{(\rho g_m - h_m)} - \\ &- \sqrt{\frac{k^2 g_m h_m \text{We}}{(\rho g_m - h_m)^2} + \frac{(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m}{(\rho g_m - h_m)}}; \\ s_{m,k}^{(2)} &= \frac{k g_m \sqrt{\rho \text{We}}}{(\rho g_m - h_m)} + \\ &+ \sqrt{\frac{k^2 g_m h_m \text{We}}{(\rho g_m - h_m)^2} + \frac{(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m}{(\rho g_m - h_m)}}; \\ w &\equiv 4\pi\chi^2; \quad \text{We} \equiv \rho U_0^2. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что из-за различия знаков перед радикалом две волны, определяемые этим выражением, имеют различные фазовые скорости. Волновое движение устойчиво, когда частоты вещественны, то есть подкоренное выражение больше нуля. Как показывает расчет, при изменении зарядового параметра w или параметра Вебера We выражение под радикалом

может уменьшаться, а с ним уменьшается и разность частот $s_{m,k}^{(j)}$, и когда она обратится в ноль, частоты волн сравниваются. Если же при дальнейшем изменении физических параметров системы выражение под радикалом станет отрицательным, то частота будет комплексной: $s_{m,k}^{(j)} \equiv \text{Re } s_{m,k}^{(j)} \pm i \text{Im } s_{m,k}^{(j)}$, что соответствует развитию неустойчивости [11]. Таким образом, критерий реализации неустойчивости волн на границе раздела сред определяется условием перехода подрадикального выражения через ноль:

$$k^2 \text{We} + (1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m))(\rho g_m - h_m) \geq 0.$$

Из этого выражения (учитывая, что h_m отрицательно, а g_m положительно) видно, что изменение величин параметров We и w может привести к дестабилизации струи.

ВТОРОЙ ПОРЯДОК МАЛОСТИ

Задача второго порядка малости является неоднородной, где функции неоднородности выражаются через решения нулевого и первого порядков малости [13]. Ее полная формулировка имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_j^{(2)} &= 0; \quad (j=1;2); \quad \Delta \Phi^{(2)} = 0; \\ r \rightarrow 0: \psi_1^{(2)} &\rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \psi_2^{(2)} \rightarrow 0; \quad \Phi^{(2)} \rightarrow 0; \\ r=1: \\ \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} &= \\ &= \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} &= \\ &= \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z}; \\ \Phi^{(2)} + \partial_r \Phi^{(0)} \xi^{(2)} + \Phi_s^{(2)}(t) &= \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{r,r} \Phi^{(0)} (\xi^{(1)})^2 - \partial_r \Phi^{(1)} \xi^{(1)}; \\ \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 &- \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \xi^{(1)} \left(\xi^{(1)} + 2 \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right) &- \\ - \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial T_0} + \rho \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial T_1} + & \\ + \rho + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 &- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} \right)^2 - \\ & - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \rho \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \\ & - \rho U_0 \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} - \rho U_0 \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r \partial z} + \\ & + \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} \right] (\xi^{(1)})^2 + \\ & + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \\ & + 2 \xi^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) = 0; \\ & \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(2)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) (\xi^{(1)})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right]_{r=1} d\varphi dz = 0; \\ & t=0: \xi^{(2)}(\varphi, z, 0) = 0; \\ & \partial_{T_0} \xi^{(2)}(\varphi, z, 0) + \partial_{T_1} \xi^{(1)}(\varphi, z, 0) = 0; \\ & \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \left(2\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2 \right) d\varphi dz = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Полное решение сформулированной задачи второго порядка малости громоздко и в данном рассмотрении не приводится (его можно найти в [13, 14]). Приведем лишь аналитическое выражение для поправки второго порядка малости к форме поверхности струи:

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) &= \alpha_1 \left\{ \cos \left[2(kz - m\varphi + s_{m,k}^{(1)} T_0) \right] + \right. \\ & \left. + \cos \left[2(kz + m\varphi + s_{m,k}^{(1)} T) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_2 \left\{ \cos \left[2 \left(kz - m\varphi + s_{m,k}^{(2)} T_0 \right) \right] + \right. \\
& \left. + \cos \left[2 \left(kz + m\varphi + s_{m,k}^{(2)} T_0 \right) \right] \right\} + \\
& +\alpha_3 \left\{ \cos \left[2kz - 2m\varphi + \left(s_{m,k}^{(1)} + s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] + \right. \\
& \left. + \cos \left[2kz + 2m\varphi + \left(s_{m,k}^{(1)} + s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] \right\} + \\
& +\alpha_4 \left\{ \cos \left[2m\varphi + \left(s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] + \right. \\
& \left. + \cos \left[2m\varphi - \left(s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] \right\} + \\
& +\alpha_5 \cos \left[2 \left(kz + s_{m,k}^{(1)} T_0 \right) \right] + \alpha_6 \cos \left[2 \left(kz + s_{m,k}^{(2)} T_0 \right) \right] + \\
& +\alpha_7 \cos \left[2kz + \left(s_{m,k}^{(1)} + s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] + \\
& +\alpha_8 \cos \left[\left(s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)} \right) T_0 \right] + \\
& +\alpha_9 \cos \left[2m\varphi \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Аналитические выражения для коэффициентов α_j приведены в Приложении А.

ТРЕТИЙ ПОРЯДОК МАЛОСТИ

Отметим сразу, что в расчетах третьего порядка малости определяются нелинейные поправки к частотам (и для струи [15], и для капли [16], и для плоской поверхности жидкости [17, 18]), имеющие сами по себе второй порядок малости. Поправки третьего порядка малости к неизвестным функциям $\xi^{(3)}(\varphi, z, t)$, $\psi_j^{(3)}(\vec{r}, t)$, $\Phi^{(3)}(\vec{r}, t)$ весьма малы по абсолютной величине и обычно в асимптотических решениях не приводятся.

Задачу третьего порядка малости выписывать не будем из-за ее громоздкости. Отметим лишь, что она неоднородна, а функции неоднородности выписываются в элементарной, но громоздкой процедуре через решения нулевого, первого и второго порядков.

Пусть в начальный момент времени возмущение поверхности струи представлено в виде:

$$\begin{aligned}
\xi(\varphi, z, 0) &= \zeta_0 \cos(kz + m\varphi) \equiv \\
&\equiv \frac{\zeta_0}{2} \left(\exp(ikz + im\varphi) + \exp(-ikz - im\varphi) \right).
\end{aligned}$$

Для нелинейных поправок к частотам волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной диэлектрической среды, после трудоемких вычислений получим выражения:

$$\delta_1 = \frac{\zeta_0^2 (H_{11} + H_{12})}{4H_1}; \quad \delta_2 = \frac{\zeta_0^2 (H_{21} + H_{22})}{4H_2}. \quad (7)$$

Коэффициенты H_j , зависящие от физико-химических параметров системы, приведены в Приложении Б.

Отметим, что для каждой из частот волн Кельвина-Гельмгольца (для каждого k) выделяется своя поправка:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &\equiv s_{m,k}^{(1)} + \varepsilon^2 \delta_1 + O(\varepsilon^3); \\
\omega_2 &\equiv s_{m,k}^{(2)} + \varepsilon^2 \delta_2 + O(\varepsilon^3); \quad (8)
\end{aligned}$$

где ω_j – полная частота волны, бегущей по поверхности струи.

В итоге полное аналитическое решение для формы осциллирующей поверхности струи будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
r &= 1 + 2\varepsilon \cos(m\varphi) \left\{ \frac{s_{m,k}^{(1)}}{\omega_0} \cos \left[\left(s_{m,k}^{(2)} + \varepsilon^2 \delta_2 \right) T_0 + kz \right] + \right. \\
& \left. + \frac{s_{m,k}^{(2)}}{\omega_0} \cos \left[- \left(s_{m,k}^{(1)} + \varepsilon^2 \delta_1 \right) T_0 + kz \right] \right\} - \\
& - \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

где $\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0)$ определяется выражением (6).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПРАВКИ К ЧАСТОТАМ

Согласно общей технике асимптотических вычислений [10], нелинейные поправки δ к частотам $\omega^{(0)}$ появляются вследствие конечности амплитуд волн, в процессе удаления секулярных слагаемых [10] в решениях третьего порядка малости. В итоге частоты волн принимают вид $\omega^{(0)} + \varepsilon^2 \delta$ при условии $\omega^{(0)} \gg \varepsilon^2 \delta$, где $\omega^{(0)}$ – частоты, рассчитываемые в линейном по ε приближении.

Для капли, струи или плоской поверхности жидкости критические условия реализации неустойчивости волн в расчетах первого порядка малости находим из условия $(\omega^{(0)})^2 = 0$. Переход квадрата частоты из области положительных значений в область отрицательных формально эквивалентен переходу частоты с вещественной оси на мнимую ось на комплексной плоскости.

В нелинейных расчетах, когда появляются нелинейные поправки к частотам, можно исходить из таких же посылок, то есть критические условия реализации неустойчивости волн найдем из условия $(\omega^{(0)} + \varepsilon^2 \delta)^2 = 0$. При выполнении соотношения $\omega^{(0)} \gg \varepsilon^2 \delta$ записанное выше условие можно представить в виде $\omega^{(0)} + 2\varepsilon^2 \delta \approx 0$, где $(\omega^{(0)})^2$ и $\varepsilon^2 \delta$ вещественны. Таким образом, малая поправка к частотам должна влиять на

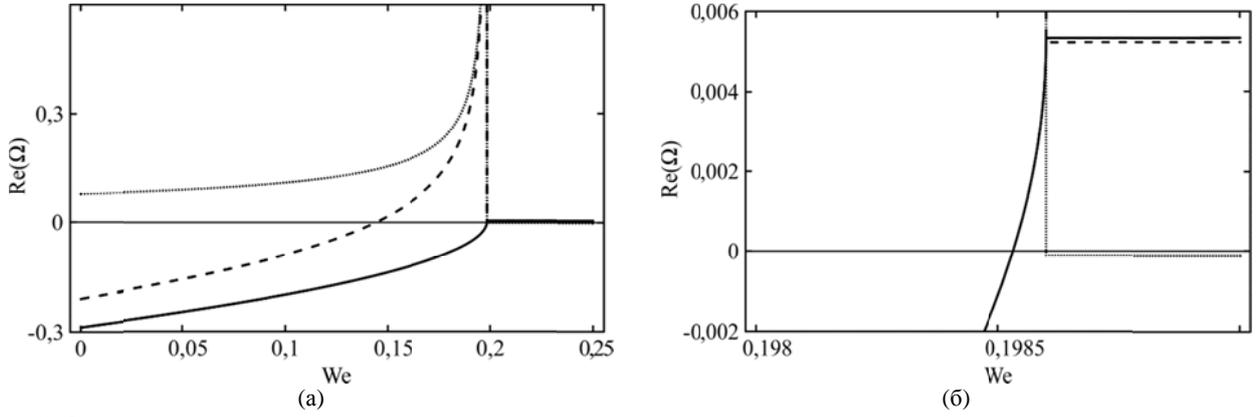


Рис. 1. Зависимость реальной части частот и нелинейной поправки (они все обозначены буквой Ω на оси ординат) от величины параметра We при $m = 0, k = 1,1, \rho = 0,001, \varepsilon = 0,1, w = 0,1$ (а) и в увеличенном масштабе в малой окрестности точки реализации неустойчивости (б).

критические условия реализации неустойчивости волн.

В данной задаче при учете тангенциального скачка скоростей на границе раздела сред для волн на поверхности заряженной цилиндрической струи, движущейся относительно материальной диэлектрической среды, складывается несколько иная картина. Частота волн, вещественная в области их устойчивости, оказывается комплексной в области неустойчивости. Частота складывается из двух слагаемых:

$$s_{1,2} = \left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \mp \sqrt{\left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}} \right); \quad (9)$$

изменяющихся при варьировании свойств жидкости струи и окружающей среды. Следует подчеркнуть, что $\gamma_m, \beta_m, \kappa_m$ – вещественны.

Первое из слагаемых в (9) с увеличением скорости растет, а второе, определяющееся радикалом, – убывает. В расчетах первого порядка критические условия реализации неустойчивости определяются переходом через ноль второго слагаемого (радикала). Заметим, что радикал обращается в ноль при $\left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0$, а одна из частот – при $\kappa_m = 0$ и знаке «минус» у радикала.

В нелинейных расчетах появляются нелинейные поправки δ_j к частотам. Поэтому условие реализации неустойчивости примет вид:

$$\text{Im} \sqrt{\left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}} + 2\varepsilon^2 \text{Im} \delta_j \approx 0.$$

Однако в точке перехода величина поправки $\varepsilon^2 \delta_j$ резко возрастает: она становится бесконечно большой. Следовательно, весь анализ в области, где $s_{m,k}^{(j)} \leq \varepsilon^2 \delta_j$, носит сугубо качественный характер, так как при $s_{m,k}^{(j)} \approx \varepsilon^2 \delta_j$ нарушается требование асимптотичности [10].

При $U_0 = 0$ выражение (9) превращается в $s_{1,2} = \pm \sqrt{\kappa_m / \beta_m}$, и критическим условием реализации неустойчивости является обращение в ноль выражения $1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)$.

Зададимся целью исследовать нелинейные поправки к частотам волн в зависимости от физических параметров системы. В нижеследующих численных расчетах рассмотрим лишь частоту $s_{m,k}^{(1)}$ и нелинейную поправку $\varepsilon^2 \delta_{1;m,k}$ к ней.

На рис. 1а представлена зависимость реальной части частоты $s_{m,k}^{(1)}$ (сплошная линия), нелинейной поправки $\varepsilon^2 \delta_{1;m,k}$ (точечная линия) и частоты $\omega_1 \equiv s_{m,k}^{(1)} + \varepsilon^2 \delta_{1;m,k}$ (пунктирная линия) от величины параметра Вебера We при фиксированном значении параметра w для осесимметричной ($m = 0$) моды (общим символом Ω на рисунках на оси ординат будем обозначать все величины, представляющие интерес в проводимом исследовании: частоты, поправки к ним и инкременты). Отметим, что в левой части рис. 1а все величины вещественны и становятся комплексными только при переходе через критическое значение параметра We . На рис. 1б (на котором приведены те же зависимости) в увеличенном масштабе показана малая окрестность критической точки, место реализации неустойчивости (где подрадикальное выражение меняет знак).

Из рис. 1 ясно видно, что в левой малой окрестности точки, где имеет место реализация неустойчивости $\varepsilon^2 \text{Re} \delta_{1;m,k}$, становится много больше $\text{Re} s_{m,k}^{(1)}$. Расчеты показывают, что $\varepsilon^2 \text{Re} \delta_{1;m,k}$ обращается в бесконечность именно в точке, где подрадикальное выражение в $s_{m,k}^{(1)}$ меняет знак. Видно также, что от точки перехода

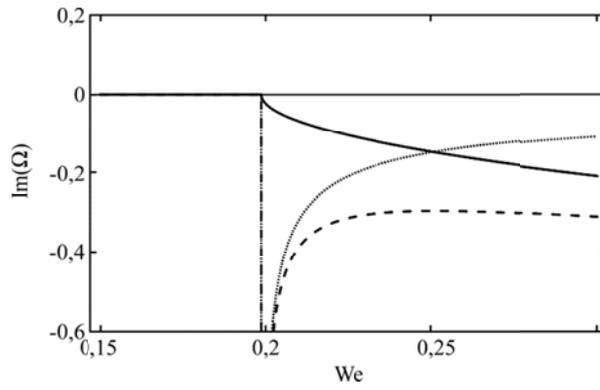


Рис. 2. Зависимость мнимой части частот и нелинейной поправки от величины параметра We при тех же значениях прочих физических величин, что на рис. 1.

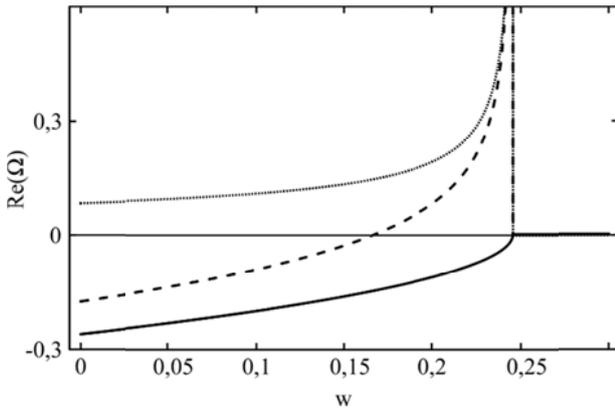


Рис. 3. Зависимость реальной части частот от параметра w при $We = 0,1$ и тех же значениях прочих физических величин, что на рис. 1.

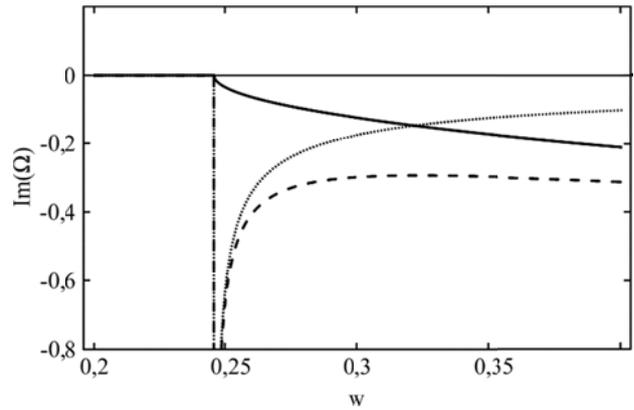


Рис. 4. Зависимость мнимой части частот от параметра w при тех же значениях прочих физических величин, что на рис. 3.

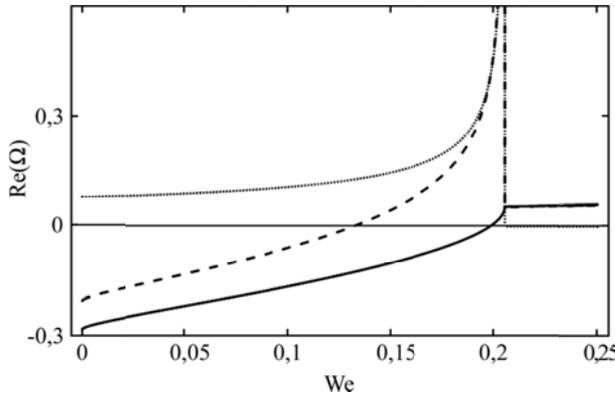


Рис. 5. Зависимость вещественной части частот от параметра We при $\rho = 0,1$ и тех же значениях прочих физических величин, что на рис. 1а.

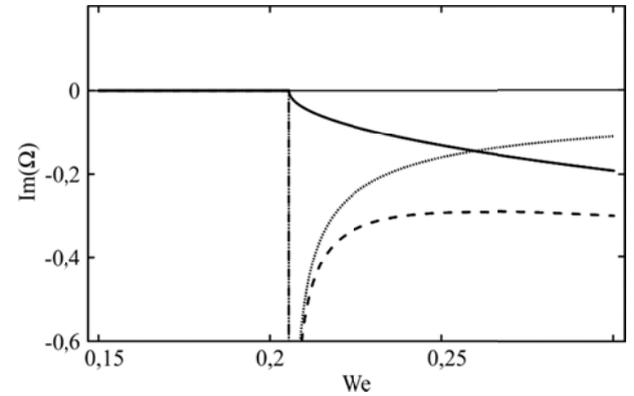


Рис. 6. Зависимость мнимой части частот от параметра We при тех же значениях прочих физических величин, что и на рис. 5.

$s_{m,k}^{(1)}$ через ноль до точки реализации неустойчивости $\left(\left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0 \right)$ вещественная часть частоты $s_{m,k}^{(1)}$ становится положительной. В частности, это означает, что обе волны $s_{m,k}^{(1,2)}$ перед реализацией неустойчивости распространяются в одном направлении, но с разными фазовыми скоростями, которые сравниваются в точке реализации неустойчивости.

На рис. 2 представлена зависимость от We мнимой части тех же величин, что и на рис. 1

(обозначения кривых на рис. 2–6 те же, что на рис. 1). Видно, что мнимые части у частоты $s_{m,k}^{(1)}$ и поправки $\varepsilon^2 \delta_{1;m,k}$ появляются в момент перехода через критическую точку $\left(\frac{\gamma_m}{\beta_m} \right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0$. Мнимая часть $\varepsilon^2 \delta_{1;m,k}$ в малой окрестности указанной точки приходит из минус бесконечности, с увеличением We уменьшается по абсолютной величине. При $We > 0,3$ поправка к инкременту $\varepsilon^2 \text{Im} \delta_{1;m,k}$ уже удовлетворяет требованию асимптотичности, то есть выполняется условие $\text{Im} s_{m,k}^{(1)} \gg \varepsilon^2 \text{Im} \delta_{1;m,k}$.

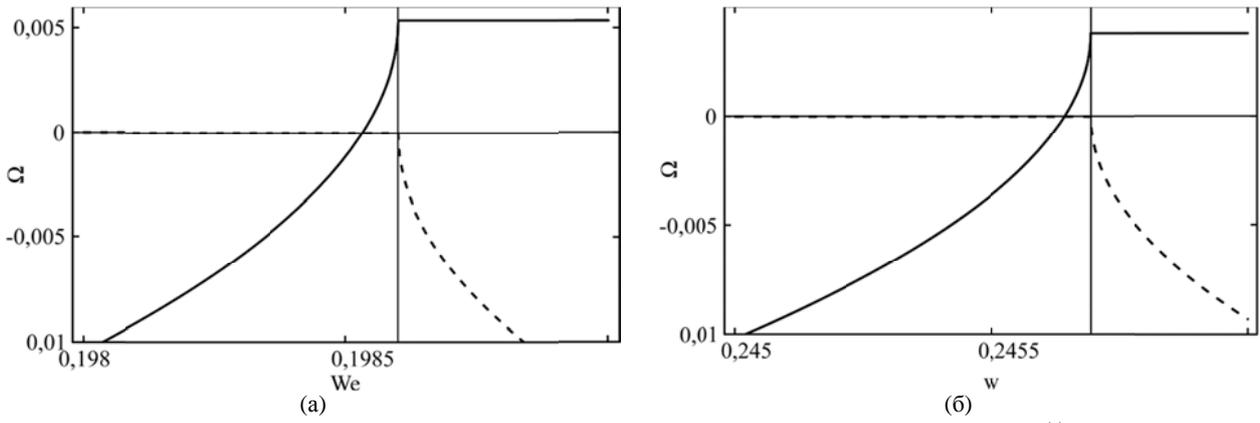


Рис. 7. Зависимости реальной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей частоты $s_{m,k}^{(1)}$ от параметра We в окрестности критического значения при $w = 0,1$ (а) и от параметра w в окрестности критического значения при $We = 0,1$ (б) и тех же значениях прочих физических величин, что и на рис. 1.

Из рис. 1б видно, что правее точки реализации неустойчивости у частоты $s_{m,k}^{(1)}$ и поправки $\varepsilon^2 \delta_{1,m,k}$ сохраняются небольшие вещественные части: $\text{Re } s_{m,k}^{(1)}$ – положительная, $\varepsilon^2 \text{Re } \delta_{1,m,k}$ – отрицательная. Физически это означает, что реализующаяся неустойчивость будет не апериодической, а колебательной.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости тех же вещественных и мнимых частей тех же величин $s_{m,k}^{(1)}$, ω_1 и $\varepsilon^2 \delta_{1,m,k}$ от зарядового параметра w при фиксированном We . В качественном отношении получаемые зависимости аналогичны вышеприведенным и отличаются от них только количественно.

На рис. 5 и 6 приведены зависимости тех же вещественных и мнимых частей $s_{m,k}^{(1)}$, ω_1 и $\varepsilon^2 \delta_{1,m,k}$ от параметра We при фиксированном w , рассчитанные при значении плотности окружающей среды в сто раз большей, чем на рис. 1–4. Из сравнения с рис. 1–2 видно, что критические значения реализации неустойчивости при этом меняются, но незначительно.

На рис. 7а приведены зависимости вещественной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей частоты $s_{m,k}^{(1)}$ от параметра We при фиксированном значении параметра w . Видно, что при переходе через критическое значение параметра Вебера частота становится комплексной.

На рис. 7б приведены зависимости вещественной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей частоты $s_{m,k}^{(1)}$ от зарядового параметра w при фиксированном We , качественно подобные изображенным на рис. 7а.

Для мод капиллярных волн с $m = 1$ (изгибных) и $m = 2$ (изгибно-деформационных) в качест-

венном отношении основные тенденции аналогичны вышеописанным, отличия носят чисто количественный характер. Так, для $m = 1$ величины нелинейных поправок меньше по абсолютной величине, чем для $m = 0$, но знакопеременны, а для $m = 2$ поправки всегда отрицательны в вещественной части и знакопеременны в мнимой. Различаются и критические условия реализации неустойчивостей.

Расчеты показывают, что для волны с частотой $s_{m,k}^{(2)}$ обнаруживаемые при численных расчетах зависимости аналогичны вышеприведенным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В аналитических асимптотических расчетах третьего порядка малости по безразмерной амплитуде начальной деформации найдены решения для формы цилиндрической струи идеальной несжимаемой проводящей жидкости, движущейся относительно материальной идеальной несжимаемой диэлектрической среды, и нелинейные поправки к частотам поверхностных волн. Последние имеют второй порядок малости по абсолютной величине и знакопеременны (в зависимости от азимутального параметра), то есть могут как увеличивать, так и уменьшать частоту волн. Поправки к критическим условиям реализации неустойчивости струи в околочитической по зарядовому параметру и параметру Вебера области в рамках асимптотичности исследованы быть не могут.

Приложение А. Коэффициенты α_j для поправки второго порядка малости к форме поверхности струи:

$$\alpha_1 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (2k h_{2m}(2k) I'_{2m}(2k) \beta_m(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} (s_{m,k}^{(2)})^2 P_1^{(1)}}{2K_{2m}(2k) \left(4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_{2m}(2k)}{(2s_{m,k}^{(1)} - s_{2m,2k}^{(1)}) \beta_m(k)} \right)};$$

$$\alpha_2 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (2k h_{2m}(2k) I'_{2m}(2k) \beta_m(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} (s_{m,k}^{(1)})^2 P_1^{(2)}}{2K_{2m}(2k) \left(4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{2m,2k}^{(2)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_{2m}(2k)}{(2s_{m,k}^{(2)} - s_{2m,2k}^{(2)}) \beta_m(k)} \right)};$$

$$\alpha_3 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (2k h_{2m}(2k) I'_{2m}(2k) \beta_m(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} s_{m,k}^{(1)} s_{m,k}^{(2)} L_1}{K_{2m}(2k) \left(4(b_m(k))^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_{2m}(2k)}{(2b_m(k) - s_{2m,2k}^{(1)}) \beta_m(k)} \right)};$$

$$\alpha_4 \equiv \frac{\zeta_0^2 s_{m,k}^{(1)} s_{m,k}^{(2)} K_1}{2m(2m-1)(1+2m-4\pi\chi^2) - (\rho_2-1)(s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^2};$$

$$\alpha_5 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (2k h_0(2k) I'_0(2k) \beta_0(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} (s_{m,k}^{(2)})^2 Q_1^{(1)}}{K_0(2k) \left(4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_0(2k)}{(2s_{m,k}^{(1)} - s_{0,2k}^{(1)}) \beta_0(k)} \right)};$$

$$\alpha_6 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (2k h_0(2k) I'_0(2k) \beta_0(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} (s_{m,k}^{(1)})^2 Q_2^{(2)}}{K_0(2k) \left(4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{0,2k}^{(2)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_0(2k)}{(2s_{m,k}^{(2)} - s_{0,2k}^{(2)}) \beta_0(k)} \right)};$$

$$\alpha_7 \equiv -\frac{\zeta_0^2 (k h_0(2k) I'_0(2k) \beta_0(k))^{-1} (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^{-2} s_{m,k}^{(1)} s_{m,k}^{(2)} Y_1}{K_0(2k) \left(4(b_m(k))^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \right) \left(1 + \frac{2\delta_0(2k)}{(2b_m(k) - s_{0,2k}^{(1)}) \beta_0(k)} \right)};$$

$$\alpha_8 \equiv -\zeta_0^2 \frac{2(1+2h_m(k)) s_{m,k}^{(1)} s_{m,k}^{(2)}}{(s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^2};$$

$$\alpha_9 \equiv \zeta_0^2 \frac{-8m\pi\chi^2(1+2h_m(k)) \left((s_{m,k}^{(1)})^2 + (s_{m,k}^{(2)})^2 \right) + h_m^{-2}(k) g_m^{-2}(k) N_1}{(2m-1)(1+2m-4\pi\chi^2) (s_{m,k}^{(1)} - s_{m,k}^{(2)})^2}.$$

Коэффициенты $P_1^{(j)}$, L_1 , K_1 , N_1 , $Q_1^{(j)}$, Y_1 не приводятся ввиду громоздкости.

Приложение Б. Коэффициенты H_j , через которые выписываются нелинейные поправки к частотам:

$$H_1 = -\frac{2I_m(k) s_{m,k}^{(1)}}{kI'_m(k)} + \frac{2\rho K_m(k) s_{m,k}^{(1)}}{kK'_m(k)} - \frac{2\rho U_0 K_m(k)}{K'_m(k)};$$

$$H_{11} = -\frac{I_m(k) \cdot kin_1^{(1,1,8)} s_{m,k}^{(1)}}{kI'_m(k)} +$$

$$+ \frac{k\chi K'_m(k) \cdot eqv^{(1,1,8)}}{K_m(k)} + \frac{\rho K_m(k) \cdot kin_2^{(1,1,8)} s_{m,k}^{(1)}}{kK'_m(k)} -$$

$$- \frac{\rho U_0 K_m(k) \cdot kin_2^{(1,1,8)}}{K'_m(k)} + din^{(1,1,8)};$$

$$H_{12} = -\frac{I_m(k) \cdot kin_1^{(1,2,7)} s_{m,k}^{(1)}}{kI'_m(k)} +$$

$$+ \frac{k\chi K'_m(k) \cdot eqv^{(1,2,7)}}{K_m(k)} + \frac{\rho K_m(k) \cdot kin_2^{(1,2,7)} s_{m,k}^{(1)}}{kK'_m(k)} -$$

$$- \frac{\rho U_0 K_m(k) \cdot kin_2^{(1,2,7)}}{K'_m(k)} + din^{(1,2,7)};$$

$$H_2 = -\frac{2I_m(k) s_{m,k}^{(2)}}{kI'_m(k)} + \frac{2\rho K_m(k) s_{m,k}^{(2)}}{kK'_m(k)} - \frac{2\rho U_0 K_m(k)}{K'_m(k)};$$

$$H_{21} = -\frac{I_m(k) \cdot kin_1^{(2,2,7)} s_{m,k}^{(2)}}{kI'_m(k)} +$$

$$+ \frac{k\chi K'_m(k) \cdot eqv^{(2,2,7)}}{K_m(k)} + \frac{\rho K_m(k) \cdot kin_2^{(2,2,7)} s_{m,k}^{(2)}}{kK'_m(k)} -$$

$$- \frac{\rho U_0 K_m(k) \cdot kin_2^{(2,2,7)}}{K'_m(k)} + din^{(2,2,7)};$$

$$H_{22} = -\frac{I_m(k) \cdot kin_1^{(1,2,8)} s_{m,k}^{(2)}}{kI'_m(k)} +$$

$$+ \frac{k\chi K'_m(k) \cdot eqv^{(1,2,8)}}{K_m(k)} + \frac{\rho K_m(k) \cdot kin_2^{(1,2,8)} s_{m,k}^{(2)}}{kK'_m(k)} -$$

$$- \frac{\rho U_0 K_m(k) \cdot kin_2^{(1,2,8)}}{K'_m(k)} + din^{(1,2,8)}.$$

Здесь $eqv^{i,j,k}$ – коэффициент в функции неоднородности условия эквипотенциальности третьего порядка малости; $kin_1^{i,j,k}$ – коэффициент в функции неоднородности первого кинематического условия в задаче третьего порядка малости; $kin_2^{i,j,k}$ – коэффициент в функции неоднородности второго кинематического условия в задаче третьего порядка малости; $din^{i,j,k}$ – коэффициент в функции неоднородности динамического условия в задаче третьего порядка малости. Аналитические выражения для этих коэффициентов в данной работе не приводятся из-за громоздкости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00170-а, 14-08-00240-а и 16-31-00095-мол.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В.М., Ярин А.Л. *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*. 1984, **18**, 112–197.
2. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Electrostat.* 1990, **25**, 165–184.
3. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение*. Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
4. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
5. Eggers J., Willermaux E. *Rep Prog Phys.* 2008, **71**(036601), 1–79.
6. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
7. Ширяева С.О. *ЖТФ*. 2010, **80**(4), 24–32.

8. Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2009, **79**(4), 35–46.
9. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А. *ЖТФ*. 2011, **81**(2), 16–22.
10. Найфе А.Х. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
12. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2012, (1), 81–92.
14. Ширяева С., Петрушов Н., Григорьев А. *ЖТФ*. 2013, **83**(5), 41–49.
15. Nayfeh F.H. *Phys Fluids*. 1970, **13**(4), 841–847.
16. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. *J Fluid Mech*. 1984, **147**, 373–395.
17. Nayfeh A.H. *J Fluid Mech*. 1971, **48**(3), 463–475.
18. Ширяева С.О., Федоров М.С., Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2015, **85**(6), 52–60.

Summary

In asymptotic non-linear calculations of the third order of smallness for the dimensionless amplitude of capillary waves, an analytical solution to the task on calculation of the form of a jet of an ideal incompressible conductive liquid moving relative to a quite ideal incompressible dielectric material medium is found. Non-linear corrections to frequencies for capillary waves of arbitrary symmetry are revealed and it is shown that they generally have a complex appearance and their material part is alternating-sign. Still, in the framework of the asymptotic property of the received solution, it is impossible to speak about their influence on cutoff conditions of implementation of instability of a surface of a liquid. However in the field of the asymptotic property of the found solution, non-linear corrections have an impact on the values of frequencies and increments of instability. A qualitative type of frequencies, non-linear corrections, and increments depending on the charge parameter and Weber's parameter is considered.

Keywords: charged stream, material medium, non-linear corrections to frequencies.