А.И. Григорьев, А.Р. Гаибов, Д.Ф. Белоножко

АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Изучение взаимодействия звуковых и ультразвуковых волн с жидкокапельными системами естественного и искусственного происхождения представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими проблемами. Речь идет об акустическом рассеянии туманов и облаков, о разработке устройств для электростатически-акустической и электромагнитно-акустической левитации капель в поле сил тяжести для прецизионных измерений физико-химических свойств веществ, об акустической коагуляции аэродисперсных систем, об экспериментах по разбрызгиванию жидкостей в реактивных двигателях для снижения высокочастотных шумов (см., например, [1–8] и указанную там литературу). Но несмотря на очевидную важность проблемы существующие теоретические представления, как правило, пренебрегают наличием у капель внутренних степеней свободы, связанных с их капиллярными колебаниями, хотя хорошо известно, что частоты капиллярных колебаний капель с размерами, характерными для жидкокапельных систем естественного происхождения (туманов, облаков, дождя), приходятся на диапазоны частот звуковых волн и длинноволновых ультразвуковых. Наличие на каплях электрического заряда, отклонение формы капель от сферической, движение капель относительно внешней среды, учет их вязкости, приводят к смещению спектра капиллярных колебаний в область более низких значений [9–12], то есть в область звуковых волн, воспринимаемых человеческим слухом.

В связи со сказанным будем решать задачу о звуковом излучении колеблющейся капли радиуса R идеальной несжимаемой электропроводной жидкости плотностью ρ_1, с коэффициентом поверхностного натяжения γ, имеющей заряд Q. Внешнюю среду будем принимать идеальной сжимаемой, характеризуемой скоростью звука V, диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ_2. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли.

Уравнение поверхности капли, возмущенной капиллярным волновым движением, порождаемым тепловым движением молекул, запишем в виде:

$$r(\theta,t) = R + \xi(\theta,t),$$

где $\xi(\theta,t)$ – малое возмущение равновесной сферической поверхности капли: $|\xi| << R$. Волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей $\psi_1(\vec{r},t)$ и $\psi_2(\vec{r},t)$ соответственно.

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных колебаний в описанной системе и интенсивности генерируемого ими звукового излучения в линейном по ξ / R приближении будет иметь вид [13]:

$$r \le R: \ \Delta\psi_1 = 0; \tag{1}$$

$$r \ge R: \ \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - \Delta\psi_2 = 0; \tag{2}$$

$$r = R: \ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r}; \tag{4}$$

$$\Delta p - \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + F_q(\theta, t) = \gamma \left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}\left(2 + \hat{L}\right)\xi \right]; \tag{5}$$

$$r = 0: \ |\psi_1| < \infty; \tag{6}$$

$$r \to \infty: \ \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + ik\psi_2 = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{7}$$

Δp – перепад давлений на границе раздела сред; $F_q(\theta, t)$ – давление электрического поля на границу раздела; $\hat{L}$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Решение задачи (1) – (7) естественно искать в виде [13]:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n P_n(\mu) \cdot \exp(i\omega_n t); \ \mu = \cos(\theta);$$

$$\psi_1(\vec{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \cdot \exp(i\omega_n t);$$

$$\psi_2(\vec{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n h_n^{(2)}(k_n r) \cdot P_n(\mu) \cdot \exp(i\omega t); \ k_n^2 \equiv \omega_n^2 / V^2; \tag{8}$$

где $P_n(\mu)$ – полиномы Лежандра; $h_n^{(2)}(k_n r)$ – вторая сферическая функция Ханкеля.

Учтем, что согласно [14] производная по времени от давления электрического поля собственного заряда на поверхность капли может быть записана в виде:

$$\frac{\partial F_q}{\partial t} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^6} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} A_n n(n-1) \cdot R^n \cdot P_n(\mu) \cdot \exp(i\omega_n t). \tag{9}$$

Продифференцируем (5) один раз по времени и в получившееся соотношение подставим (8), (9) с учетом граничных условий (2)–(4). В итоге получим дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний в анализируемой системе:

$$\omega_n^2 = (n-1)\frac{\gamma}{R^3} \cdot \left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\gamma R^3} - (n+2) \right] \left[\frac{\left(\rho_2 / \rho_1\right) \cdot h_n^{(2)}(k_n r)}{k_n R h_{n-1}^{(2)}(k_n r) - (n+1) h_n^{(2)}(k_n r)} - \frac{1}{n} \right]^{-1} \tag{10}$$

Если положить, что $V \to \infty$, то есть принять внешнюю среду несжимаемой, то выражение (10) переходит в известное [14] дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний идеальной несжимаемой электропроводной капли в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющее вид:

$$\omega_n^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{\rho_2 n + (n+1)\rho_1} \frac{\gamma}{R^3} \cdot \left[(n+2) - W\right]; \ W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\gamma R^3}. \tag{11}$$

Для основной моды ($n=2$) капиллярных колебаний капли уравнение (10) будет иметь вид:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{R^3}(W-4)\cdot\left[\frac{(\rho_2/\rho_1)\left[3R\omega/V + i\left(-3+R^2\omega^2/V^2\right)\right]}{\left(-9R\omega/V + R^3\omega^3/V^3\right)+i\left(9-4R^2\omega^2/V^2\right)} - \frac{1}{2}\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Численный анализ этого уравнения показывает, что оно имеет пять корней. Если принять $\rho_1 = 1\,\text{г/см}^3$, $\rho_2 = 1{,}3\cdot10^{-3}$ г/см^3, $V = 3{,}3\cdot10^4$ см/с, $R = 0{,}01\,\text{см}$, $\gamma = 72$ дин/см, $W = 1$ (что соответствует капиллярным колебаниям в воздухе при атмосферном давлении капли воды, несущей заряд равный одной четвертой от предельного в смысле устойчивости по Рэлею), то получим следующие значения корней:

$$\omega_2^{(1)} = \left(2{,}1\cdot10^4 + i\cdot2{,}5\cdot10^{-12}\right)\text{c}^{-1};\ \omega_2^{(2)} = \left(-2{,}1\cdot10^4 + i\cdot2{,}5\cdot10^{-12}\right)\text{c}^{-1};$$
$$\omega_2^{(3)} = \left(6{,}5\cdot10^6 + i\cdot3{,}7\cdot10^6\right)\text{c}^{-1};\ \omega_2^{(4)} = \left(-6{,}5\cdot10^6 + i\cdot3{,}7\cdot10^6\right)\text{c}^{-1};\ \omega_2^{(5)} = i\cdot6\cdot10^6\ \text{c}^{-1}.$$

Первые два корня соответствуют капиллярным осцилляциям капли с частотами примерно равными определенным из соотношения (11) при $n=2$. Эти осцилляции весьма медленно затухают за счет отбора энергии на создание продольных волн ультразвукового диапазона во внешней среде, которые реализуются на частотах $\omega_2^{(1)}$ и $\omega_2^{(2)}$ приблизительно равных корням дисперсионного уравнения (11). Вторая пара корней соответствует быстро затухающим колебаниям сжимаемой среды в малой окрестности поверхности капли на частотах порядка частот собственных колебаний среды в объеме, равном объему капли (вихревым движениям среды у поверхности капли). Пятый корень соответствует быстрому апериодическому рассасыванию возмущений плотности внешней среды у поверхности капли. Из сказанного следует, что в плане исследования звуковых колебаний, генерируемых осцилляциями несжимаемой капли, основной интерес представляют первые два корня уравнения (12).

Чтобы получить аналитическое выражение для величины декремента затухания η, соответствующего первым двум корням (12), будем искать решение (12) в виде $\omega = \omega_0 + i\cdot\eta$, где согласно вышеприведенным результатам численных расчетов $\eta \ll \omega_0$. Подставим в (12) $\omega = \omega_0 + i\cdot\eta$ и, раскладывая различные степени ω в линейном по η приближении, приравняем нулю мнимую часть получившегося соотношения, линейного по η. В итоге, для декремента затухания η получим выражение

$$\eta \approx \frac{\rho_2 R^5 \omega_0^6}{81\cdot\rho_1\cdot V^5}.$$

Полная интенсивность звукового излучения колеблющейся капли определяется известным выражением [13]:

$$I = \rho_2 V\cdot\oint\overline{v^2}\,ds, \qquad (13)$$

где черта над выражением означает среднее по периоду колебания значение, то есть $\overline{v^2}$ есть среднее значение квадрата скорости частиц среды в звуковой волне, а интегрирование производится по замкнутой поверхности, охватывающей начало координат. Выберем в качестве такой поверхности сферу радиуса R_0, где $R_0 \gg \lambda$, λ – длина волны.

Учитывая, что $\vec{v} = \mathrm{Re}\left[grad(\psi_2)\right]$, а также принимая во внимание ортогональность полиномов Лежандра, для полной интенсивности звукового излучения капли, осциллирующей без изменения объема, получим

$$I(V,R,\gamma,\rho_2,\rho_1) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi\rho_2 V R^2 C_n^2 \omega_n^2}{[kRh_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1)h_n^{(2)}(kR)]\cdot[kRh_{m-1}^{(2)}(kR) - (m+1)h_m^{(2)}(kR)]}. \qquad (14)$$

Оценим интенсивность акустического излучения от слабо заряженной ($W = 0{,}01$) дождевой капли минимально возможного размера с $R = 0{,}025\,\text{см}$ (согласно [15] размеры дождевых капель изменяются от 0,025 до 0,25 см, капли более мелких размеров относятся к "мороси", а более крупные при падении в воздухе разрушаются из-за аэродинамического сопротивления, см. также [12]). Примем, что капля совершает осцилляции за счет возбуждения основной моды своих колебаний ($n = 2$) с амплитудой $C_2 = 0{,}1R$. Причиной колебаний капли могут служить процессы ее столкновения с более мелкими и медленно летящими, гидродинамическое притяжение к равным себе по размеру и взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью, характерной как для облаков, так и для дождя [15]. В силу интегрального действия указанных причин амплитуда колебаний капель может быть весьма значительной ($C_n \sim R$) [16–18]. При $\gamma = 73$ дин/см, $\omega_2 \approx 6{,}1 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, $\rho_1 = 1$ г/см^3, $k_2 \approx 0{,}2$ см$^{-1}$, $k_2 R \approx 4{,}6 \cdot 10^{-3}$. Примем, кроме того, что $\rho_2 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $V = 3{,}3 \cdot 10^4$ см/с. В итоге из (14) несложно найти:

$$I \approx \frac{4\pi\rho_2 V C_2^2 R^2 \omega^2}{\left|k_2 R h_2^{(1)}(k_2 R) - 3h_2^{(2)}(k_2 R)\right|^2} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-15} \text{ эрг/с.} \tag{15}$$

Отметим, что для капли с принятыми размером (R = 0,025 см) и зарядом ($W = 0{,}01$) в звуковом диапазоне будут излучать первые четыре моды, но интенсивность их излучения убывает с ростом номера моды (более чем на порядок при переходе к следующей моде).

Принимая, что в 1 км^3 пространства, занятого дождем, находится $3 \cdot 10^{14}$ капель указанного размера (примерно $3\,\text{см}^3$ на одну каплю), несложно найти, что интегральная интенсивность звукового излучения, связанного с основной модой капиллярных колебаний капли ($n = 2$), из объема в 1 км^3 будет примерно равна $0{,}66$ эрг/с на частоте $\omega_2 \approx 6{,}1 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. Это соответствует силе звука ≈ 22 дБ на границе излучающего объема, что примерно соответствует силе звука тихой человеческой речи.

При увеличении заряда капли частота ее капиллярных колебаний будет уменьшаться в соответствии с (11). При этом будут уменьшаться k_2 и $k_2 R$, а следовательно, и интенсивность излучения. Так, при $W = 1$ интенсивность I при $\omega_2 \approx 5{,}3 \cdot 10^3$ с$^{-1}$ будет равна $\approx 7{,}6 \cdot 10^{-16}$ эрг/с, а сила звука на границе излучающего объема в 1 км^3 теперь составит примерно 17 дБ.

Если в (15) подставить выражение для k_2 через ω_2 и ω_2 через R, то несложно получить, что интенсивность звукового излучения от колеблющейся капли $I \sim R^{-2}$. Это означает, что звуковое излучение от крупных капель при прочих равных условиях будет существенно более слабым. Так для наиболее крупной дождевой капли с $R = 0{,}25$ см и $W = 0{,}01$ интенсивность звукового излучения, связанного с основной модой, происходящего на частоте 190 с$^{-1}$, составляет всего $\approx 1{,}8 \cdot 10^{-17}$ эрг/с. Расчет же силы звука при тех же условиях, что в вышеприведенном примере (от облака в $1\,\text{км}^3$), дает весьма малую величину $\approx 1\,1$ дБ. Звук такой силы человеческий слух не воспринимает. При увеличении заряда капли, например для капли с $R = 0{,}25$ см и $W = 0{,}1$, интенсивность звукового излучения, идущего на частоте ≈ 126 с$^{-1}$, связанного с основной модой, равна $\approx 5{,}2 \cdot 10^{-18}$ эрг/с.

Звук, порождаемый капиллярными колебаниями больших капель, будет достаточно интенсивен для восприятия на слух только при большой амплитуде колебаний капли, когда она будет сравнима с радиусом капли R (как это наблюдается в экспериментах и натурных исследованиях дождя [16–18]). В этом случае сила звука будет такой же, как и для капель в вышеприведенном примере $R = 0{,}025$ см.

Следует отметить, что частотам звуковых колебаний, воспринимаемых слухом человека, соответствуют более сорока первых частот капиллярных колебаний капли с $R = 0{,}25$ см. Поэтому, несмотря на то, что их интенсивность, как отмечалось выше, будет мала, суммирование интенсивностей звукового излучения капли на различных частотах (поскольку ухо воспринимает звук интегрально во всем диапазоне звуковых волн) может превысить нижний порог слышимости.

Очевидно, что в условиях реальных осадков, характеризующихся широкой функцией распределения капель по размерам $f = f(R)$, полная интенсивность акустического излучения определится суммированием звукового излучения всех капель, излучающих в представляющем интерес диапазоне частот:

$$I(V, R, \gamma, \rho_2, \rho_1) = \int I(R) \cdot f(R) \cdot dR .$$

Все вышесказанное применимо также к облакам и туманам. Следует лишь учесть, что облака и туманы характерны меньшими средними значениями радиусов капель по сравнению с дождем, и будут излучать звук в слышимом диапазоне длин волн только при больших зарядах отдельных капель, близких к предельному в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду (когда $W \to 4$) [9, 14].

Таким образом, интегральное акустическое излучение, связанное с капиллярными колебаниями капель в жидко-капельных системах естественного и искусственного происхождения может быть весьма значительным. Этот феномен может быть использован для дистанционного обнаружения и зондирования облаков и туманов в естественных условиях. Возможно использование искусственных жидко-капельных систем для экранирования звуковых помех.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00-15-9925.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт Дж.В.* (Лорд Рэлей). Теория звука. Т.2. М., 1955.
2. *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М., 1955.
3. *Грин Х., Лейн В.* Аэрозоли - пыли, дымы и туманы. Л., 1969.
4. *Won-Kyu Rhim, Sang Kun Chung, Hyson M.T.* et al Large charged drop levitation against gravity //IEEE Transaction on Industry Applications. 1987. V.IA-23. №6. P. 975–979.
5. *Шагапов В.Ш.* К теории распространения звука в тумане // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 506–512.
6. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л., 1990.
7. *Trinh E.H., Holt R.G, Thiessen D.B.* The dynamics of ultrasonically leviteted drops in an electric fields//Phys. Fluids. 1996. V. 8, № 1. P. 43–61.
8. *Песочин В.Р.* Возбуждение акустических колебаний при испарении капель жидкостей // ТВТ. 1996. Т. 34, № 3. С. 491–493.
9. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
10. *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* Волновые и вихревые движения жидкости в сильно заряженной капле // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8
11. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* Учет эффекта релаксации электрического заряда в задаче о неустойчивости заряженной поверхности жидкости // ЭОМ. 1996. № 2–3. С. 37–40.
12. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. Григорьев О.А.* Неустойчивость заряженной сферической поверхности в обтекающем потоке идеальной жидкости // Там же. 1998. № 1–2. С. 48–50.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., 1953.
14. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* Об устойчивости шаровой молнии по отношению к собственному некомпенсированному заряду //ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.
15. *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л., 1983.
16. *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
17. *Beard K.V.* Cloud and precipitation Physics Research 1983-1986 //Reviews of Geophysics. 1987. V. 25. № 1. P. 357–370.
18. *Beard K.V., Tokay Ali.* A field study of small raindrop oscillation //Geophysical Research Letters. 1991. V. 18, № 12. P. 2257–2260.

Поступила 19.12.2000

Summary

The dispersion equation has been obtained for the spectrum of capillary oscillations of charged drop in compressible environment. It is shown that oscillation of the drop having size and charge typical for cloud, mist or rain drop results to generations of sonic and ultrasonic waves. The expression for intensity of sonic radiation from the single drop is proposed.