

С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, А.С. Голованов

### НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Исследования динамики колебаний поверхности капель жидкости вызывают постоянный интерес на протяжении многих лет, поскольку капля является ключевым объектом в самых разнообразных геофизических, технических и технологических явлениях и процессах. Например, с ней приходится встречаться в распылителях жидких топлив и в устройствах каплеструйной печати [1], при исследовании проблем грозового электричества [2] и в капельной модели ядра атома [3–5].

Впервые теоретическое изучение капиллярных колебаний и линейная теория устойчивости заряженной сферической капли были представлены Рэлеем [6] (см. также [7]). Он рассмотрел каплю как колебательную систему с бесконечным набором собственных частот колебаний. В качестве отдельных мод осесимметричных колебаний поверхности рассматривались колебания, описываемые соответствующими полиномами Лежандра, при этом номер моды соответствовал числу выпуклостей (или впадин) на поверхности капли. Рэлей рассчитал частоты капиллярных колебаний и нашел критические условия потери устойчивости различными осесимметричными модами сильно заряженной капли. Наименее устойчивой оказалась основная (вторая) мода капиллярных колебаний, критические условия потери устойчивости которой и определяют устойчивость всей капли. Величину заряда на капле фиксированного радиуса с заданным коэффициентом поверхностного натяжения, при которой теряет устойчивость основная мода, принято называть рэлеевским пределом устойчивости  $Q_c$  заряженной капли. При превышении зарядом рэлеевского предела капля неустойчива и у нее не существует равновесных сферических форм.

В последние два десятилетия появился ряд работ, посвященных изучению нелинейной динамики поверхности капли [8–16, 17, 18]. Можно выделить три направления проводимых исследований: 1) нелинейный анализ эволюции капиллярных осцилляций поверхности капли с применением классических методов теории возмущений; 2) расчет статических форм капли вблизи рэлеевского предела и анализ характера бифуркаций решений, имеющих место в окрестности критического значения заряда; 3) исследование взаимодействия между отдельными модами колебаний заряженной капли.

Впервые классические методы теории возмущений (метод Линшtedта-Пуанкаре) к исследованию осесимметричных капиллярных колебаний конечной амплитуды, совершаемых поверхностью незаряженной капли несжимаемой вязкой жидкости, были применены в [8]. Это позволило получить поправки к форме поверхности капли, потенциалам скоростей и частотам колебаний во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения равновесной формы капли, вызванного виртуальным увеличением амплитуды  $n$ -ой моды для  $n = 2, 3, 4$ . В экспериментальных исследованиях сдвига частоты при нелинейных колебаниях капли в условиях отсутствия силы тяжести, проведенных в [9], получено хорошее согласие с данными работы [8]. В работе [10] на основе более подходящего для исследования многочастотных колебаний метода многих масштабов были исследованы осцилляции конечной амплитуды заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, вызванные начальным возбуждением первых трех мод ( $n = 2, 3, 4$ ), для случая заряда, меньшего рэлеевского предела. Однако выяснилось, что при приближении величины заряда к критическому значению найденные в [10] поправки к амплитудам гармонических колебаний становятся несправедливыми, так как содержат неограниченно нарастающие при  $Q \rightarrow Q_c$  слагаемые. Для устранения таких расходи-

мостей в [11] на основе асимптотического поведения решений, полученных в [10], малый параметр масштабирования  $\varepsilon$  вводится таким образом, чтобы он характеризовал соотношение между амплитудой деформации и отклонением величины заряда на капле  $Q$  от критического  $Q_c$ . Это позволило авторам [11] проанализировать нелинейную динамику осесимметричных осцилляций поверхности невязкой заряженной капли вблизи рэлеевского предела и получить с точностью до второго порядка малости по величине  $\varepsilon$  решения, описывающие эволюцию формы капли, поля скоростей и электрического поля при начальном возбуждении основной моды колебаний поверхности. Нелинейный анализ неосесимметричных колебаний капли, несущей заряд, мало отличающийся от рэлеевского предела, методами, использованными в [11], предпринят в [13], где получены динамические уравнения для амплитуд неосесимметричных мод, описываемых сферическими функциями второго порядка. Решения этих уравнений в зависимости от величины начальной деформации и близости заряда к критическому значению могут проявлять стохастическое поведение.

Нелинейная структура и устойчивость осесимметричных статических форм поверхности идеально проводящей заряженной невязкой капли с зарядом вблизи Рэлеевского предела при начальном возбуждении основной ( $n=2$ ) моды рассматривались в [11]. В частности было показано, что рэлеевский предел соответствует точке транскритической бифуркации семейства статических сферических форм капли на семейства осесимметричных вытянутых и сплюснутых сфероидальных форм (этот результат был подтвержден численными расчетами [12]). Вытянутые формы существуют при значениях заряда, меньших критического, и неустойчивы по отношению к малоамплитудным возмущениям поверхности. Сплюснутые статические формы существуют при зарядах, больших рэлеевского предела, причем они оказались устойчивыми по отношению к малым осесимметричным возмущениям. Кроме того выяснилось, что при значениях заряда, немного меньших критического, устойчивость исходной сферической формы капли может быть нарушена колебаниями конечной амплитуды. Причем величина заряда, на которую снижается его критическое значение, пропорциональна амплитуде начального удлинения капли. Результаты аналитических вычислений в [11] подтверждаются численными расчетами статических форм поверхности капли при возбуждении первых трех мод. Численный анализ осесимметричных статических форм заряженной капли вблизи рэлеевского предела был продолжен в [16] с использованием интегральной формы уравнения Лапласа. В квадратичном по амплитудам мод приближении обнаружены несимметричные относительно экваториальной плоскости формы капель, неустойчивые в линейном приближении. В работе [13] при анализе неосесимметричных колебаний капли получено, что сплюснутые сфероидальные формы капли, существующие согласно [11] и численным расчетам [12] при  $Q \geq Q_c$ , неустойчивы по отношению к неосесимметричным возмущениям (позднее аналогичный результат получен и в линейном анализе [14, 15]) рэлеевский предел соответствует точке абсолютной неустойчивости заряженной капли. Начальная стадия реализации неустойчивости заряженной капли проходит через последовательность удлиняющихся вытянутых сфероидов.

Вопросы взаимодействия различных мод капиллярных колебаний заряженной поверхности капли рассматривались в работах [10, 17]. Основное внимание в [10] было уделено анализу "вторичного" резонансного взаимодействия двух высоких мод, которое проявляется в нарастании поправок второго порядка малости к амплитудам колебаний, когда частоты соответствующих мод удовлетворяют соотношению  $\omega_m^2 = k^2 \omega_n^2$  (где  $k$  – целое,  $m \neq n$ ). Для частного случая  $m=6$ ,  $n=4$  получены выражения для частот и амплитуд модулированного колебания при различных начальных условиях. Исследование взаимодействия различных мод капиллярных колебаний заряженной капли было продолжено в [17], где показано, что неустойчивость капли, заряженной немного меньше рэлеевского предела, может наступать вследствие нелинейного взаимодействия нерезонансных мод (то есть когда частоты взаимодействующих мод не связаны никаким явным соотношением). В случае, когда начальное возмущение представляет собой возбуждение одной из высоких мод капиллярных колебаний, но амплитуда этой моды недостаточно велика, чтобы реализовалась ее неустойчивость, может претерпеть неустойчивость основная мода за счет нелинейного взаимодействия с устойчивой возбужденной модой.

Все аналитические исследования [8, 10, 11, 13, 16, 17] нелинейной динамики поверхности капли проводились в рамках модели идеальной жидкости. Лишь в работе [18] при расчетах численными методами было учтено влияние вязкости жидкости на осцилляции формы капли. Получено, что даже наличие малой вязкости существенным образом сказывается на резонансом взаимодействия отдельных мод колебаний.

В настоящей работе в более общей, чем в [3] постановке решается методом многих масштабов задача о расчете спектра капиллярных колебаний и взаимодействия различных мод во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения капли невязкой проводящей жидкости, заряженной ниже Рэлеевского предела. Использование иной по сравнению с [10] методики удовлетворения начальным условиям позволило получить решение для ситуаций, когда начальное возмущение поверхности связано с начальным возбуждением двух произвольных мод колебаний.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен  $Q$ , а объем определяется объемом сферы с радиусом  $R$ . Пусть в начальный момент времени  $t=0$  равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Зададимся целью определить спектр возникающих в такой ситуации капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени  $t>0$ . В нижеследующих рассуждениях будем пользоваться безразмерными переменными, в которых  $R=\rho=\sigma=1$ .

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, введем следующие упрощения: 1) форму поверхности капли будем принимать осесимметричной как в начальный момент, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее поверхность капли, в полярной системе координат с началом в центре капли представим в виде

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1; \quad (1)$$

движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, то есть примем, что поле скоростей движения жидкости в капле  $\vec{V}(\vec{r}; t) = \nabla \psi(\vec{r}; t)$  полностью определяется функцией потенциала скорости  $\psi(\vec{r}; t)$ :

$$\Delta \psi(\vec{r}; t) = 0; \quad (2)$$

$$\Delta \Phi(\vec{r}; t) = 0; \quad (3)$$

и граничных условий:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\vec{r}; t) \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\vec{r}; t) \rightarrow 0; \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (6)$$

$$\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 = \nabla \cdot \vec{n}; \quad (7)$$

$$\Phi = const. \quad (8)$$

Чтобы замкнуть систему (2)–(8), сформулируем дополнительные условия. Неизменности полного заряда капли:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) ds = Q, \quad \text{где } S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (9)$$

неизменности объема капли:

$$\int_V r^2 dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \frac{4}{3} \pi, \quad \text{где } V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Начальные условия к поставленной задаче сформируем в виде задания начальной деформации равновесной сферической формы капли

$$t=0: \quad \xi(\theta) = \xi_0 + \varepsilon \cdot \sum_{i \in R} h_i P_i(\cos \theta); \quad \sum_{i \in R} h_i = 1; \quad (11)$$

и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t=0: \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

В (11)  $k$  – множество значений номеров возбужденных мод.

В выписанных соотношениях используются следующие обозначения:  $\Delta p$  – перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия;  $\varepsilon$  – амплитуда начального возмущения формы поверхности капли;  $P_j(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра порядка  $j$ ;  $\xi_0$  – константа, определяемая из условия (10) и с точностью до слагаемого второго порядка малости равная

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in R} \frac{h_i^2}{(2i+1)} + 0(\varepsilon^3). \quad (13)$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи с точностью до квадратичных по малому параметру  $\varepsilon$  слагаемых воспользуемся классическим методом многих масштабов [19]. А сами искомые функции  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi(\vec{r}, t)$ ,  $\Phi(\vec{r}, t)$  представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и будем считать зависящими не просто от времени  $t$ , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр  $\varepsilon$ :  $T_m \equiv \varepsilon^m t$ :

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, T_2, \dots); \\ \psi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \psi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, T_2, \dots); \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, T_2, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

В итоге найдем выражение для изменения во времени формы поверхности капли:

$$\begin{aligned} r(\theta, t) &\approx 1 + \varepsilon \left\{ \sum_{i \in R} h_i \cos(\omega_i t) \cdot P_i(\mu) \right\} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i \in R} \frac{h_i^2}{(2i+1)} [1 + \cos(2\omega_i t)] \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_n(t=0) \cdot \cos(\omega_n t) - N_n(t) \cdot P_n(\mu) \right\} + 0(\varepsilon^3 t); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N_n(t) &= \frac{1}{2} \left\{ h_k^2 \cdot \left[ \lambda_{k,k,n}^{(-)} + \lambda_{k,k,n}^{(+)} \cdot \cos(2\omega_k t) \right] + h_k h_p \left[ \lambda_{k,p,n}^{(+)} + \lambda_{p,k,n}^{(+)} \right] \cdot \cos((\omega_k - \omega_p)t) + \right. \\ &\left. \left[ \lambda_{k,p,n}^{(-)} + \lambda_{p,k,n}^{(-)} \right] \cdot \cos((\omega_k + \omega_p)t) + h_p^2 \left[ \lambda_{p,p,n}^{(-)} + \lambda_{p,p,n}^{(+)} \cdot \cos(2\omega_p t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\lambda_{mnl}^{(+)} \equiv \left[ \gamma_{mnl} \pm \omega_n \omega_l \eta_{mnl} \right] \cdot \left[ \omega_n^2 - (\omega_m m \omega_l)^2 \right]^{-1};$$

$$\gamma_{mnl} \equiv K_{mnl} \left[ \omega_m^2 \cdot (n-m+1) + 2n[l(l+1)-1] + [l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3] \cdot n \frac{Q}{8\pi} \right] +$$

$$+ \alpha_{mnl} \left[ \frac{1}{m} \omega_m^2 + n \frac{Q}{8\pi} \right]; \quad \eta_{mnl} \equiv K_{mnl} \left( \frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{mnl} \cdot \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{n}{2l} \right);$$

$$\eta_{mnl} \equiv K_{mnl} \left( \frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{mnl} \cdot \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{n}{2l} \right);$$

$$K_{mnl} \equiv \left[ C_{mnl}^{000} \right]^2; \quad \alpha_{mnl} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{mnl}^{000} C_{mnl}^{-110},$$

$$C_{\min}^{000} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } m+l+n = 2g+1, \text{ где } g - \text{целое число} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-m)!(g-l)!(g-n)} \left[ \frac{(2g-2m)!(2g-2l)(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \end{cases}$$

если  $m+l+n=2g$  ( $g$  – целое число);

$$C_{m\ln}^{-110} \equiv \sqrt{2n+1} n! \left[ \frac{(m+1-n)!m(m+1)}{(n+m-l)!(n-m+l)!(m+l+n+1)!l(l+1)} \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^{m+n+z} (m+z-1)!(n+l-z+1)}{z!(m-z+1)!(n-z)!(l-n+z-1)!}.$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям  $z$ , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. Отметим, что  $C_{m\ln}^{000}$  и  $C_{m\ln}^{-110}$  – коэффициенты Клебша-Гордана [20], которые отличны от нуля только, если нижние индексы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|m-l| \leq n \leq (m+l); \quad m+l+n=2g, \quad (g - \text{целое число}).$$

Причем согласно (28)  $\lambda_{k,k,n}^{(\pm)}$  и  $\lambda_{p,p,n}^{(\pm)}$  отличны от нуля лишь для четных значений  $n$ , принадлежащих диапазонам  $[0, \eta_k]$  и  $[0, \eta_p]$  соответственно, а  $\lambda_{k,p,n}^{(\pm)}$  и  $\lambda_{p,k,n}^{(\pm)}$  – для значений  $n$  из диапазона  $[|k-p|, (k+p)]$ , удовлетворяющих условию:  $n+k+p$  – четное.

Таким образом, при одновременном возбуждении четной и нечетной мод в результате их взаимодействия во втором порядке малости будет генерироваться возмущение всех четных мод из диапазона  $[0; \max(2k, 2p)]$  и всех нечетных мод из диапазона  $[|k-p|, (k+p)]$ .

Интересно отметить, что начальное возмущение двух соседних высоких мод колебаний инициирует возбуждение моды с  $n=1$ , описывающей смещение капли как целого (то есть движение центра масс осциллирующей капли). Таким образом, капля оказывается трансляционно неустойчива. Этот вывод находится в согласии с результатами работы [21], посвященной исследованию трансляционной неустойчивости пузыря при колебаниях его поверхности.

4. Из (15) видно, что начальное возмущение любой  $k$ -ой (четной, либо нечетной) одиночной моды капиллярных колебаний приводит к возбуждению во втором порядке малости только четных мод с номерами, лежащими в диапазоне  $[0; 2k]$ , что иллюстрируется рис. 1,а,б. На рисунках приведены рассчитанные по (15) графики зависимости от времени амплитуд  $M_n^{(2)}$  различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся во втором порядке малости в результате взаимодействия. Начальное искажение равновесной сферической формы задано в виде возмущения 2-й и 5-й мод, соответственно при  $W=3,9$  (критическое для начала неустойчивости сферической капли значение параметра  $W$  определено соотношением  $W_*=4$ ). Несложно видеть, что (в противоречии с предсказаниями линейной теории) независимо от вида начального возмущения равновесной сферической формы капли, несущей заряд, близкий к критическому, но меньший его, неустойчивость по отношению к собственному заряду может быть реализована через быстрое нарастание амплитуды основной моды ( $n=2$ ). Этот вывод качественно согласуется с данными [17], посвященной численному расчету нелинейных осцилляций заряженной капли. Когда начальная деформация связана с пятой модой, имеется и количественное согласие временных зависимостей амплитуд, возбужденных во втором порядке малости мод с работой [17].

Из рис. 1 видно, что скорость увеличения амплитуды основной моды увеличивается с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию. С увеличением номера моды, начальное возмущение которой определяет исходное возмущение равновесной сферической формы, растет и количество мод, возбуждающихся за счет взаимодействия.

На рис. 2,а,б приведены рассчитанные по соотношениям (1), (15) контуры форм капли (ось симметрии горизонтальна) в различные моменты безразмерного времени при значениях параметра  $W$ , близких к критическому, когда начальное возмущение равновесной сферической формы задано в виде возмущения второй и пятой мод соответственно. Следует отметить, что область равномерной пригодности соотношений (15) в соответствии с представлениями теории возмущений определена условием  $t < \varepsilon^{-1}$ . На самом деле выписанное ограничение по времени  $t$  еще более жесткое, что видно из приведенных иллюстраций. Кривые с номером 4 построены уже на границе применимости равномерного разложения. Это следует из сравнения амплитуд результирующих отклонений поверхности капли (кривые 4) от ее формы в начальный момент времени (кривые 2) и проявляется в очевидном несохранении первоначального объема для капель с образующими, обозначенными номером 4.

Тем не менее, несложно видеть, что когда начальное возмущение равновесной формы определено четными полиномами Лежандра, то образующая форма капли в любой момент времени строится из четных же полиномов Лежандра и имеет симметричный относительно начала координат вид. При достаточно большом  $t$  (лежащем на границе интервала равномерности решения по  $t$ ) капля проявляет тенденцию к делению на две равные части. Если же начальное возмущение связано с нечетными полиномами Лежандра, то форма капли в любой последующий момент времени асимметрична относительно начала координат, несмотря на то, что за счет взаимодействия мод во втором порядке малости по  $\varepsilon$  возбуждаются только четные моды. При больших  $t$  такая капля проявляет тенденцию к асимметричному делению.

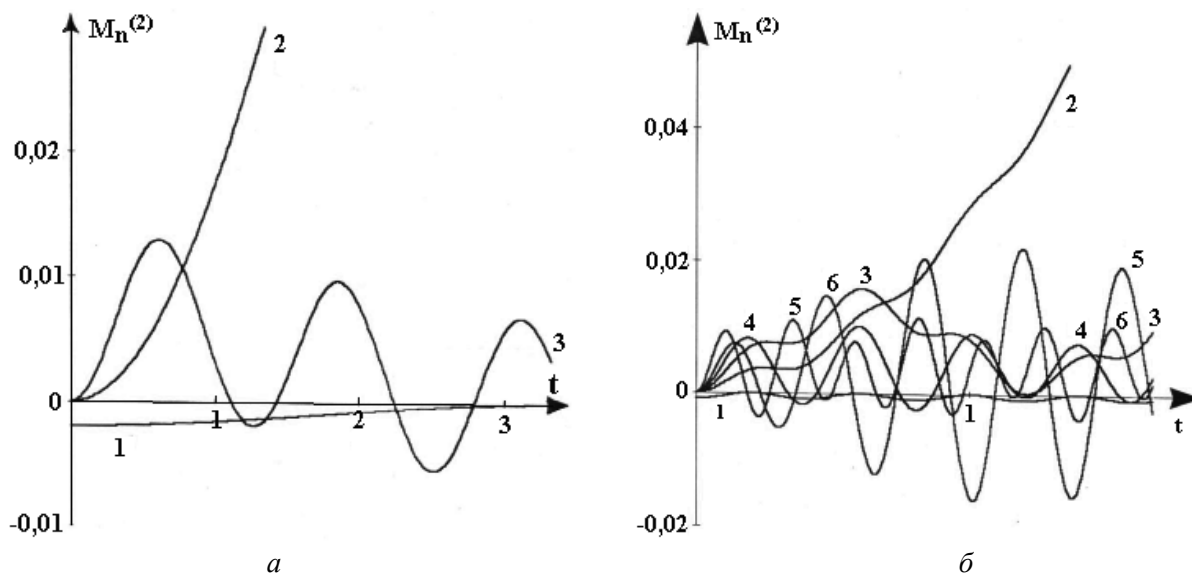


Рис. 1. Графики зависимости от безразмерного времени  $t$  безразмерных амплитуд  $M_n^{(2)}$  различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли при  $W=3,9$ , возбуждающихся в результате взаимодействия во втором порядке малости: 1 – нулевая мода; 2 – вторая (основная) мода; 3 – четвертая мода; 4 – шестая мода; 5 – восьмая мода; б – десятая мода. Начальное искажение равновесной сферической формы задано в виде возмущения с безразмерной амплитудой  $\varepsilon$ : рис. 1,а) второй моды; рис. 1,б) пятой моды.

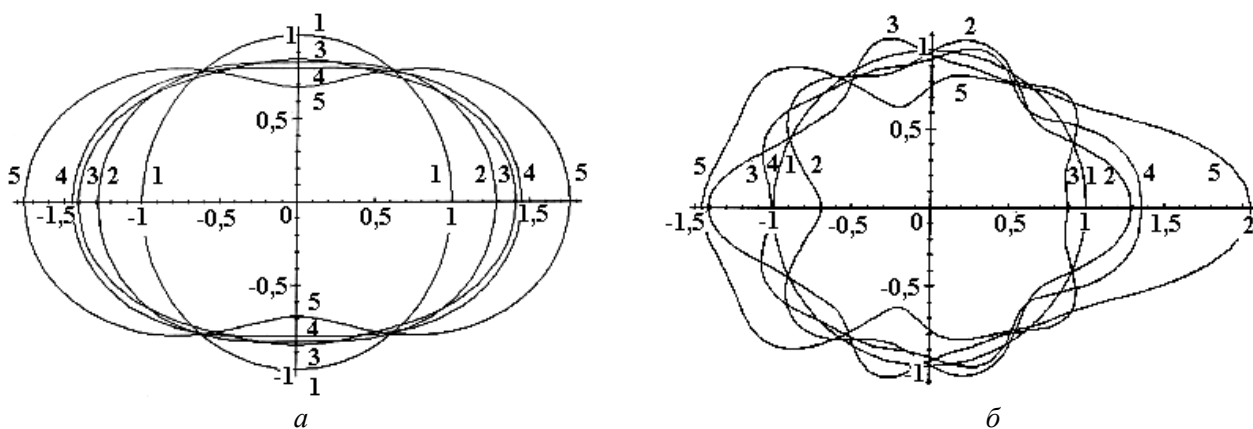


Рис. 2,а. Контуры огибающей формы капли в различные моменты времени, когда начальное возмущение с амплитудой  $\varepsilon=0,3$  равновесной сферической формы задано в виде виртуального возмущения различных мод. Кривая 1 определяет равновесную сферическую форму; 2 – форму в начальный момент времени (сферическую форму, деформационную возмущением вида  $\varepsilon P_n(\cos \theta)$ ,  $n=2$ ; 5).  
 а:  $n=2$ ;  $W=3,9$ . Кривая 3 соответствует моменту времени  $t=0,14 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 4 – моменту времени  $t=0,28 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 5 – моменту времени  $t=0,56 \cdot \varepsilon^{-1}$ .  
 б:  $n=5$ ;  $W=3,8$ . Кривая 3 соответствует моменту времени  $t=0,1 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 4 – моменту времени  $t=0,2 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 5 – моменту времени  $t=0,475 \cdot \varepsilon^{-1}$ .

На рис. 3–5 приведены рассчитанные по (15) графики зависимости от времени амплитуд  $M_n^{(2)}$  различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся во втором порядке малости, когда начальное искажение равновесной сферической формы задано в виде одновременного возмущения двух (рис. 3, 4) и трех (рис. 5) различных мод. На рис. 4 приведены результаты расчета амплитуд в условиях внутреннего нелинейного резонанса между четвертой и шестой модами, в результате которого между ними имеет место интенсивная перекачка энергии. В условиях резонанса амплитуда резонансной четвертой моды превышает амплитуду основной моды. Взаимодействие резонансного типа возникает между модами во втором порядке малости, частоты колебаний которых при некотором значении заряда  $Q$  удовлетворяют соотношению  $\omega_m^2 = j^2 \cdot \omega_n^2$ , где  $j$  – целое число, а  $m \neq n$ . В результате такого взаимодействия амплитуды соответствующих мод неограниченно (в использованном приближении) периодически нарастают во времени. На рис. 6, 7 приведены рассчитанные для ситуаций с многомодовым начальным возмущением контуры форм капли в различные моменты безразмерного времени.

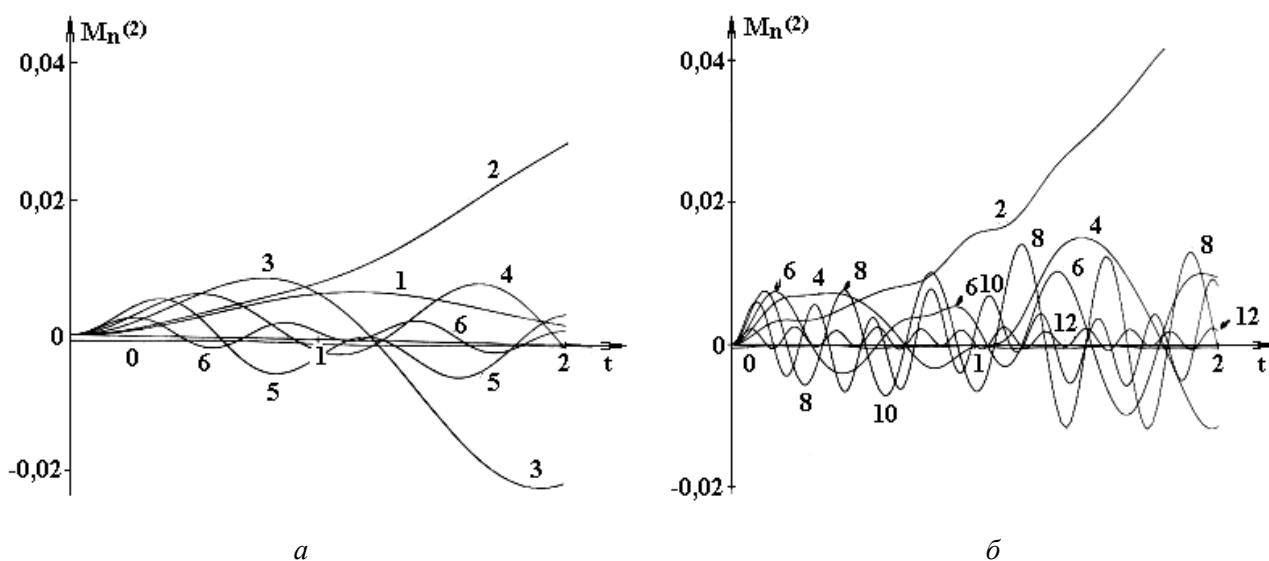


Рис. 3. Графики зависимости от безразмерного времени  $t$  безразмерных амплитуд  $M_n^{(2)}$  различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся в результате взаимодействия во втором порядке малости при  $W=3,9$ ,  $\varepsilon=0,1$ , если начальная деформация задана в виде: а)  $\varepsilon \cdot [P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$ ; б)  $\varepsilon \cdot [P_4(\mu) + P_6(\mu)]/2$ . Цифра у кривой совпадает с номером моды.

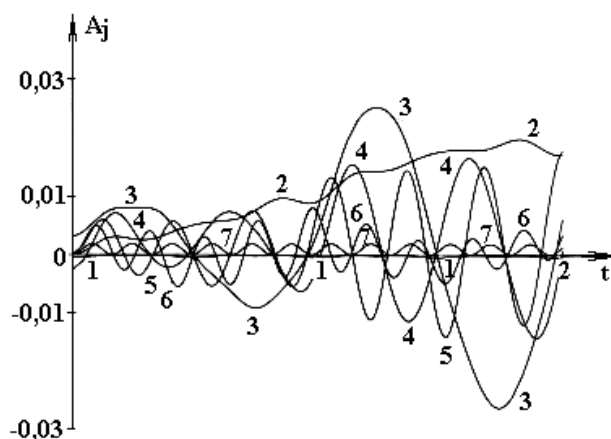


Рис. 4. Временные зависимости амплитуд мод, возбуждаемых во втором порядке малости при  $\varepsilon=0,1$ , в окрестности резонанса (когда  $\omega_6^2 = 4 \cdot \omega_4^2$ ). Кривая 1 соответствует нулевой моде; 2 – второй моде; 3 – четвертой моде; 4 – шестой моде; 5 – восьмой моде; 6 – десятой моде; 7 – двенадцатой моде. Начальная деформация задана в виде виртуального возмущения:  $\varepsilon \cdot [P_4(\mu) + P_6(\mu)]/2$ .

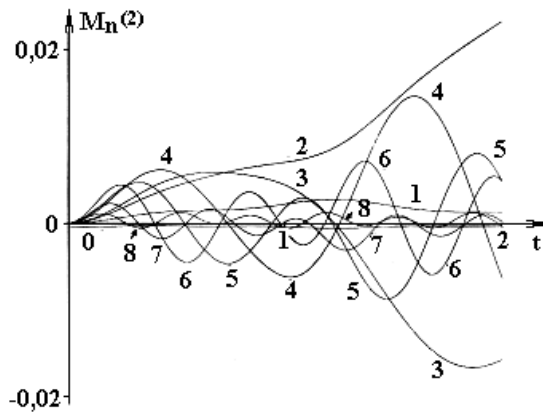


Рис. 5. Графики зависимости от безразмерного времени  $t$  безразмерных амплитуд  $M_n^{(2)}$  различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся в результате взаимодействия во втором порядке малости при  $W=3,9$ ,  $\varepsilon=0,1$ , если начальная деформация задана в виде суперпозиции трех мод:  $\varepsilon \cdot [P_2(\mu) + P_3(\mu) + P_4(\mu)] / 3$ . Цифра у кривой совпадает с номером моды.

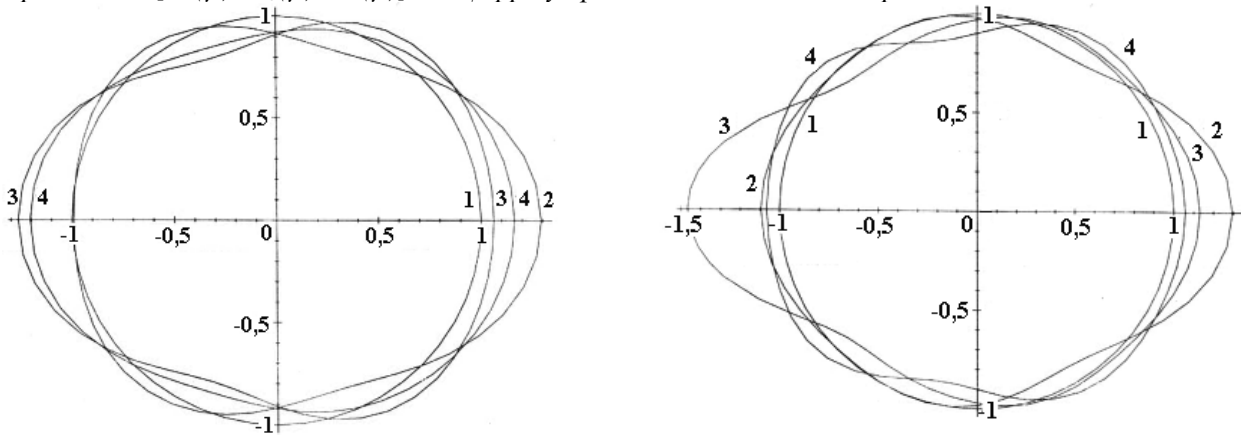


Рис. 6. Контуры образующей формы капли при  $W=3,6$  в различные моменты времени, когда начальное возмущение с амплитудой  $\varepsilon=0,3$  равновесной сферической формы задано в виде виртуального возмущения различных мод. Кривая 1 определяет равновесную сферическую форму; кривая 2 – форму в начальный момент времени: а) начальная деформация имеет вид  $\varepsilon \cdot [0,5 \cdot P_2(\mu) + 0,5 \cdot P_3(\mu)]$ ; кривая 3 определяет форму капли в момент времени  $t=0,35 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 4 – в момент времени  $t=0,525 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; б) начальная деформация имеет вид  $\varepsilon \cdot \left[ \frac{1}{3} P_2(\mu) + \frac{1}{3} P_3(\mu) + \frac{1}{3} P_4(\mu) \right]$ ; кривая 3 определяет форму капли в момент времени  $t=0,385 \cdot \varepsilon^{-1}$ ; кривая 4 – в момент времени  $t=0,525 \cdot \varepsilon^{-1}$ .

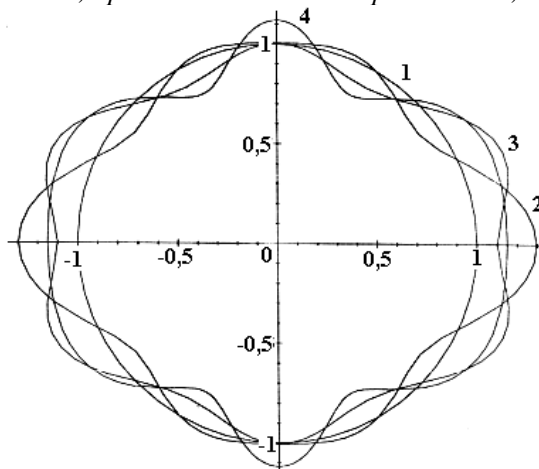


Рис. 7. Контуры образующей формы заряженной капли при  $\varepsilon=0,3$  в момент времени  $t=0,4 \cdot \varepsilon^{-1}$  в условиях нелинейного резонанса четвертой и шестой мод при  $W=W_p=2,67$  (кривая 3) и вдали от него при  $W=1,2 \cdot W_p$  (кривая 4), когда начальная деформация имеет вид  $\varepsilon \cdot [P_4(\mu) + P_6(\mu)] / 2$ . Кривые 1 и 2 соответствуют равновесной сферической форме и форме капли в начальный момент времени.



5. Из приведенных графиков следует, что в отсутствие внутренних резонансов независимо от вида начальной деформации наиболее быстро растет амплитуда основной моды капиллярных колебаний. Поскольку использованная процедура расчета обеспечивает пригодность полученных выражений до тех пор пока амплитуда мод, возбужденных во втором порядке малости, не сравняется с амплитудой начального возмущения, то увеличение амплитуды основной моды до величины порядка  $\varepsilon$  будет соответствовать вытягиванию капли в сфероид с квадратом эксцентриситета  $e^2 \approx 3\varepsilon - 5,25 \cdot \varepsilon^2$  [22]. Несложно видеть, что даже при малых значениях  $\varepsilon \sim 0,1$  это приведет к заметному удлинению капли и к снижению, согласно [23], критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Williams A. Combustion of droplets of fluid fuels // *Combust. Flame*. 1973. V.21. P. 1–31.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // *Изв. РАН. МЖГ*. 1994. № 3. С. 3–22.
3. Cohen S., Swiatecki W.J. The deformation energy of a charged drop. Part 4 // *Ann. of Phys.* 1962. V.19. P. 67–164.
4. Cohen S., Swiatecki W.J. The deformation energy of a charged drop. Part 5 // *Ann. of Phys.* 1963. V. 22. P. 406–437.
5. Nix J.R. Calculation of fission barriers for heavy and superheavy nuclei // *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 1972. V. 22. P. 65–120.
6. Rayleigh J.W.S. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. P. 184–186.
7. Hendricks C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatics forces // *Am. J. Phys.* 1963. V.31. P. 450–453.
8. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Nonlinear oscillation of inviscid drops and bubbles // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. P. 519–537.
9. Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P. Oscillations of liquid drops: results from USML-1 experiments in Space // *J. Fluid Mech.* 1996. V.308. P. 1–14.
10. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Resonant oscillations of inviscid charged drop // *J. Fluid Mech.* 1984. V.147. P. 373–395.
11. Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. Dynamic of charged drop break-up // *Proc. Roy. Soc. London*, 1985. V.A401. P. 67–88.
12. Basaran O.A., Scriven L.E. Axisymmetric shapes and stability of isolated charged drops // *Phys. Fluids A*. 1989. V.1. № 5. P. 795–798.
13. Natarayan R., Brown R.A. The role of three-dimensional shapes in the break-up of charged drops // *Proc. Roy. Soc. London*, 1987. V.A410. P. 209–227.
14. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критические условия неустойчивости сплюснутой сфероидальной сильно заряженной капли // *ЖТФ*. 1999. Т.69. Вып. 7. С. 10–14.
15. Шукин С.И., Григорьев А.И. Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида // *ЖТФ*. 1998. Т.68. Вып. 11. С. 48–52.
16. Pelekasis, Tsamopoulos J.A., Manolis G.D. Equilibrium shapes and stability of charged and conducting drops // *Phys. Fluids*. 1990. V.A2. № 8. P. 1328–1340.
17. Feng Z. Instability caused by the coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 333. P. 1–21.
18. Lundgren T.S., Mansour N.N. Oscillation of drops in zero gravity with weak viscous effects // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 194. P. 479–510.
19. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Автоколебательная неустойчивость свободной поверхности вязкоупругой среды // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т.25. Вып. 15. С. 41–45.
20. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л., 1975.
21. Feng Z.C., Leal L.G. Translational instability of a bubble undergoing shape oscillations // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 6. P. 1325–1336.
22. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной капли // *ЖТФ*. Т. 65. Вып. № 9. С. 39–45.
23. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. Об устойчивости капиллярных колебаний слабо сфероидальной заряженной капли // *ЖТФ*. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.

### Summary

At investigation in a square-law approximation on amplitude of capillary oscillations of a heavily charged drop is shown, that in a cause of interaction of various modes of capillary oscillations the losses of a stability by a drop having a charge smaller then critical, can be initiated by virtual excitation not only basic, but any of modes or linear combination of several arbitrary modes. The analysis of regularities of formation of a linear combination of several arbitrary modes. The analysis of regularities of formation of a spectrum of modes and losses of a stability by some their them, excited owing to interaction in the second order of smallness of several modes is carried spent, which perturbation is set in an initial instant.

В.В. Шамко, В.Г. Жекул, С.Г. Поклонов, И.С. Швец

## ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ РАЗРЯДА В ВОДОНЕФТЯНЫХ ЭМУЛЬСИЯХ В ИСКРОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
пр. Октябрьский, 43 А, г. Николаев, 540018, Украина*

Искровым приближением называют полуэмпирический подход к описанию состояния разрядной плазмы, в основу которого положена линейная зависимость между удельной внутренней энергией  $\omega$  и проводимостью  $\sigma$  плазмы [1–3]

$$\omega = A \sigma, \quad (1)$$

где  $A$  – искровая постоянная, зависящая от свойств среды, в которой осуществляется разряд. Если энергию выразить через давление  $P$  и эффективный показатель адиабаты  $\gamma$  плазмы [4], то окажется, что между  $P$  и  $\sigma$  также существует линейная зависимость

$$P = (\gamma - 1) A \sigma. \quad (2)$$

Впервые эти закономерности были установлены для разрядов в газах [1], а несколько позже – для подводных искровых разрядов [2] и электрического взрыва в жидких и твердых диэлектриках [3]. Как показал впоследствии анализ [5], выполненный для подводной искры, функциональная зависимость  $\sigma = \sigma(P)$  имеет более сложный вид и может быть представлена многочленом четвертой степени относительно  $P$ . Однако при характерном для разрядов в воде диапазоне давлений  $50 \leq P \leq 400$  МПа отклонение значений  $\sigma$ , вычисленных по линейной зависимости [2], от рассчитанных по более точному сплайн представлению [5] не превышает 23% (табл. 1). Величина этого отклонения характеризует меру погрешности искрового приближения.

Таблица 1. Сравнение расчета по линейной (2) и нелинейной [5] зависимостям

$10^{-8}P$ , Па		0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00
$10^{-3} \sigma$ , См/м	ф-ла (2)	7,69	11,5	15,4	19,2	23,1	30,8	38,5	46,2	61,5
	[5]	9,32	14,6	19,9	25,0	29,6	37,4	42,9	46,8	57,6