

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Задача о неустойчивости незаряженной или слабозаряженной капли, находящейся в электрическом поле и парящей в восходящем воздушном потоке, представляет значительный интерес для разнообразных приложений технической физики, геофизики и технологии [1–3]. В частности, она важна для теории грозowego электричества, поскольку напряженность естественного электрического поля в облаках недостаточна для зарождения линейной молнии [4]. Из экспериментов [5] известно, что обдувание градины потоком воздуха снижает критическую для зажигания коронного разряда величину напряженности внешнего электрического поля. Это связано с взаимодействием двух видов неустойчивости свободной поверхности водяного слоя на поверхности градины: неустойчивости поверхности раздела по отношению к индуцированному заряду [3] и к тангенциальному разрыву поля скоростей [6].

Будем искать критические условия неустойчивости заряженной поверхности сферической капли радиуса R идеально проводящей несжимаемой жидкости с плотностью ρ_2 , имеющей заряд Q и находящейся в однородном электростатическом поле с напряженностью \vec{E}_0 , движущейся вдоль \vec{E}_0 с постоянной скоростью \vec{U} относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды, имеющей плотность ρ_1 и диэлектрическую проницаемость ϵ . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ .

Предположение, о том, что форма капли близка к сферической, обусловлена следующими соображениями: с одной стороны, под действием электрического поля капля будет деформироваться вдоль поля в фигуру, близкую к сфероиду вращения [7], с другой стороны, в силу уравнения Бернулли деформироваться к сплюснутому сфероиду [8], поскольку скорость обдувающего каплю потока и падение давления в нем максимальны в области экватора. В случае, когда векторы напряженности электрического поля \vec{E}_0 и скорости обдувающего потока \vec{U} коллинеарны, эти две тенденции могут скомпенсировать друг друга, и форма капли будет близка к сферической. Кроме того, данное предположение существенно упрощает расчеты.

Волновые движения в окружающей среде и в капле будем считать потенциальными с гармоническими потенциалами скоростей $\Psi_1(\vec{r}; t)$ и $\Psi_2(\vec{r}; t)$ соответственно. Искажение границы раздела сред $\xi(\vec{r}, t)$, появляющееся из-за теплового движения молекул, будем считать осесимметричным и малым ($|\xi|/R \ll 1$). Рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли в линейном приближении по $|\xi|/R$.

Для упрощения расчетов введем безразмерные переменные, в которых $R=1$, $\sigma=1$, $\rho_2=1$. Тогда все остальные физические величины, входящие в формулировку задачи (за которыми оставим обычные обозначения), будут выражены в единицах своих характерных значений:

$$r_* = R; \quad t_* = R^{3/2} \rho_2^{1/2} \sigma^{-1/2}; \quad U_* = R^{-1/2} \rho_2^{-1/2} \sigma^{1/2};$$

$$P_* = R^{-1} \sigma; \quad Q_* = R^{3/2} \sigma^{1/2}; \quad E_* = R^{-1/2} \sigma^{1/2}.$$

Уравнение возмущенной поверхности капли запишется в виде

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t).$$

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\Delta\Phi = 0; \quad \Delta\Psi_i = 0; \quad (i=1,2); \quad (1)$$

$$r=0: \quad \nabla\Psi_2 = 0; \quad \Phi = \text{const}; \quad (2)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial r}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial r}; \quad (4)$$

$$-\rho \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla\Psi_1)^2 - P_E + P_\sigma = 0; \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}; \quad \nabla\Psi_1 = \vec{U}. \quad (6)$$

Здесь $\rho \equiv \rho_1/\rho_2$; $\Phi(\vec{r}; t)$ – потенциал электрического поля; $\vec{n}_z \parallel \vec{E}_0$; $P_\sigma = P_\sigma^0 + P_\sigma(\xi)$ – давление сил поверхностного натяжения; $P_E = P_E^0 + P_E(\xi)$ – давление электрического поля на поверхности капли. Величины P_σ^0 и P_E^0 имеют нулевой порядок малости, а $P_E(\xi)$ и $P_\sigma(\xi)$ – первый порядок малости по $|\xi/R|$. Выражение для P_σ выведено в [6], а давление электрического поля P_E легко рассчитывается по схеме, подробно изложенной в [9, 10]

Решение уравнений Лапласа (1) для потенциалов Φ , Ψ_1 и Ψ_2 с учетом граничных условий (2), (6) и возмущение $\xi(\theta, t)$ будем искать стандартными гидродинамическими методами [6, 9–11], используя известные рекуррентные соотношения для сферических функций [12], в виде разложения по нормированным сферическим функциям $Y_n(\theta)$, в силу симметрии задачи зависящим только от угла θ .

Дисперсионное уравнение, получающееся в результате решения задачи (1)–(6), представляет собой бесконечный определитель вида

$$\begin{vmatrix} \chi_2 S^2 - WeM_2 + \gamma_2 & \rho USI_2 - (wW)^{\frac{1}{2}} X_2 & WeJ_2 - wG_2 & 0 & \dots \\ -\rho USL_3 - (wW)^{\frac{1}{2}} F_3 & \chi_3 S^2 - WeM_3 + \gamma_3 & \rho USI_3 - (wW)^{\frac{1}{2}} X_3 & WeJ_3 - wG_3 & \dots \\ WeK_4 - wT_4 & -\rho USL_4 - (wW)^{\frac{1}{2}} F_4 & \chi_4 S^2 - WeM_4 + \gamma_4 & \rho USI_4 - (wW)^{\frac{1}{2}} X_4 & \dots \\ 0 & WeK_5 - wT_5 & -\rho USL_5 - (wW)^{\frac{1}{2}} F_5 & \chi_5 S^2 - WeM_5 + \gamma_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

где $We \equiv \rho U^2$; $W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}$; $w \equiv \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}$;

$$\alpha_n = \frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}; \quad \beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}; \quad K_n = \frac{9\alpha_n \alpha_{n-1}}{2n};$$

$$L_n = \frac{(9n+6)\alpha_n}{2n(n+1)}; \quad T_n = \frac{9n(n-1)(n-2)}{\sqrt{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)}}; \quad F_n = \frac{3n(2n-3)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}};$$

$$\chi_n = \frac{\rho}{(n+1)} + \frac{1}{n}; \quad \gamma_n = (n-1)[n+2-W] - w\lambda_n; \quad M_n = \frac{9\alpha_n\beta_{n-1}}{2n} + \frac{9\beta_n\alpha_{n+1}}{2(n+2)};$$

$$I_n = \frac{(9n+12)\beta_n}{2(n+1)(n+2)}; \quad X_n = \frac{3(n+1)(2n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}; \quad J_n = \frac{9\beta_n\beta_{n+2}}{2(n+2)};$$

$$\lambda_n = 9 \left(\frac{n^3}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{4n(n+1)-2}{(2n-1)(2n+3)} \right);$$

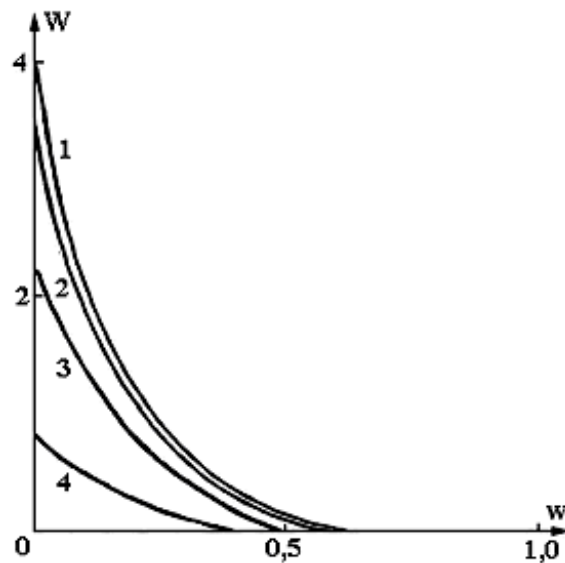
$$G_n = \frac{9n(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}}.$$

Здесь S – комплексная частота, переменные We , W и w определяют соответственно параметры Вебера, Рэлея и Тейлора.

Определитель (7) имеет бесконечно большой порядок, и связь частот капиллярных осцилляций S с параметрами We , W , w , n нужно искать путем последовательных приближений, например, как это сделано в [9]. Тем не менее, некоторые выводы о виде такой связи в нулевом приближении можно сделать сразу. В пренебрежении взаимодействием мод, критические условия устойчивости n -й моды капиллярных колебаний определяются приравнением n -й диагональной компоненты определителя (7) и имеют простой аналитический вид:

$$(n-1)(n+2) - WeM_n - (n-1)W - w\lambda_n = 0. \quad (8)$$

Тройка чисел, соответствующая координатам точки в пространстве переменных We , W , w , определяет критическое значение параметров We , W , w , при которых данная мода становится неустойчивой. Из (8) видно, что попарная зависимость параметров друг от друга является линейной. При равенстве нулю двух из трех параметров критические значения третьего параметра для основной моды ($n=2$) определены равенствами: $We=0,97$, $W=4$, $w=0,86$.



Зависимость критического значения параметра Рэлея W от безразмерного параметра Тейлора w для основной моды при $\rho = 10^{-3}$ и различных значениях скорости U : 1 – 0; 2 – 10; 3 – 20; 4 – 30.

На рисунке представлена зависимость параметра Рэлея W от параметра Тейлора w для основной моды при различных значениях скорости U , отношении плотностей среды и капли $\rho = 10^{-3}$, рассчитанной по (7) на основе определителя 6×6 . Зависимость $W(w)$, приведенная на рисунке, учитывает взаимодействие мод и в отличие от зависимости, представленной формулой (8), не является линейной. Кроме того, при равенстве нулю параметра Рэлея критическое значение параметра Тейлора меньше, чем в линейном случае и составляет примерно $W=0,63$. Из (8) (рисунок) видно, что критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности капли существенно зависят от скорости ее движения, снижаясь с ростом скорости.

Численный анализ дисперсионного соотношения (7) показывает, что критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к индуцированному заряду существенно снижаются при наличии на капле собственного заряда и обдувающего потока газа. Это происходит вследствие суперпозиции двух типов неустойчивости: неустойчивости свободной поверхности капли по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей и неустойчивости по отношению к собственному или индуцированному внешним полем заряду. В зависимости от отношения плотностей капли и среды, величины ее заряда, напряженности электрического поля и скорости обдувающего потока капля может претерпевать как апериодическую, так и колебательную неустойчивости. Апериодическая неустойчивость при малых скоростях обдувающего потока реализуется в деформации к вытянутому сфероиду и со сбросом избыточного поверхностного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильнозаряженных капелек; при больших скоростях обдувающего потока – в деформации к парашютообразной (при малых значениях напряженности электрического поля) или крестообразной (при больших значениях напряженности электрического поля) форме и распаде на несколько мелких и крупных капель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
2. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. №4. С. 17–28.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
4. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л., 1989.
5. Дячук В.А., Мучник В.М. Коронный разряд обводненной градины, как основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.
7. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280 P. 383–397.
8. Гонор А.Л., Ривкин В.Я. Динамика капли // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Т.17. М, 1982. С. 98–159.
9. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. Неустойчивость заряженной сферической капли, движущейся относительно среды // Электронная обработка материалов. 1998. № 1–2. С. 48–50.
10. Ширяева С.О., Лазарянц А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994.
11. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Методы расчёты критических условий электрогидродинамических неустойчивостей. Ярославль, 1996.
12. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л., 1975.

Поступила 11.02.02

Summary

It have been shown for instability of a charged drop with respect to the induced charge that the critical conditions are decreased essentially if the drop have an own charge and is blown by a gas flow.