

Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли

* С. О. Ширяева, ** А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: shir@uniyar.ac.ru, **e-mail: grigorai@mail.ru

В нелинейных асимптотических расчетах по двум малым параметрам (величине безразмерных стационарной деформации изначально сферической капли и амплитуде ее капиллярных осцилляций) проведен анализ электромагнитного излучения незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле. Во внешнем электростатическом поле на вершинах капли индуцируются электрические заряды противоположных знаков, которым могут быть поставлены в соответствие «эффективные» заряды, расположенные на ее оси симметрии. Поскольку расстояние между этими «эффективными» зарядами порядка радиуса капли, то они образуют диполь, который на расстояниях много больших размеров капли создает такое же электрическое поле, как и сама капля. При осцилляциях поверхности капли будет осциллировать и диполь, что приведет к генерации электромагнитных волн дипольного типа.

Ключевые слова: незаряженная капля, электростатическое поле, осцилляции, дипольное электромагнитное излучение.

УДК 551.594

ВВЕДЕНИЕ

Дипольное излучение электромагнитных волн осциллирующими заряженными каплями, обнаруживаемое в квадратичных по малому параметру асимптотических расчетах, неоднократно становилось предметом теоретического исследования [1–2] в связи с проблемами радиолокации облаков [3]. Сама проблема электромагнитного излучения осциллирующих заряженных облачных капель была впервые сформулирована в [4] и уточнена в [5–6]. Но, как оказалось, в [4–6] было выявлено лишь весьма слабое квадрупольное излучение, обнаруживаемое в линейных расчетах. Дипольное излучение от заряженной капли, фиксируемое в нелинейных асимптотических расчетах второго порядка малости, гораздо интенсивнее (на 14–15 порядков).

В [7] по аналогии с [4–6] в первом порядке малости по амплитуде осцилляций рассчитана интенсивность квадрупольного излучения незаряженной электропроводной капли, осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле. В этом случае излучение происходит из-за ускоренного движения зарядов, индуцированных внешним электростатическим полем, при осцилляциях поверхности капли. Его интенсивность, как и в [4–6], весьма мала, и это излучение не может быть зафиксировано средствами радиолокации (имеется в виду интегральное излучение от облаков).

Далее в нелинейных асимптотических расчетах более высоких порядков малости, чем

первый, рассчитывается интенсивность дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей во внешнем электростатическом поле незаряженной капли.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об электромагнитном излучении незаряженной капли идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , осциллирующей в однородном электростатическом поле напряженностью \vec{E}_0 . Примем, что капля находится в вакууме, ее объем определяется объемом сферы с радиусом R . Под действием внешнего электростатического поля в капле индуцируются электрические заряды: отрицательный на ее половинке, обращенной к полю, и положительный на противоположной, образующие дипольный момент [8, с. 19]. Капля при этом вытягивается в сфероид с $r = r(\theta)$, ось симметрии которого коллинеарна внешнему полю. Квадрат эксцентриситета сфероида e^2 будем считать малым параметром: $e^2 \ll 1$.

На поверхности капли будет существовать капиллярное волновое движение, возбуждаемое уже тепловым движением молекул воды [9] и приводящее к искажению $\xi(\theta, \varphi, t)$ равновесной в поле сфероидальной формы. Для снижения громоздкости примем, что это возмущение осесимметрично (это упрощение не скажется на общности рассмотрения). Отношение

$\max |\xi(\theta, t) / R|$ примем в качестве второго малого параметра задачи и обозначим ε . Индуцированные заряды распределятся по возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли, уравнение которой определится выражением:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t). \quad (1)$$

Все расчеты задачи будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным с потенциалом $\psi(\vec{r}, t)$, так что поле скоростей волнового течения жидкости в капле определится как $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla\psi(\vec{r}, t)$. В безразмерных переменных потенциал $\psi(\vec{r}, t)$ будет иметь тот же порядок малости, что и амплитуда осцилляций поверхности капли $\psi(\vec{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$ (потому что возмущение $\xi(\theta, t)$ порождается капиллярным волновым движением). Введем также электрический потенциал $\Phi(\vec{r}, t)$ поля индуцированных в капле зарядов.

Математическая формулировка задачи об электромагнитном излучении незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, имеет вид:

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow 0: \psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right);$$

$$P(\vec{r}, t) - P_{atm} + P_E(\vec{r}, t) = P_\sigma(\vec{r}, t);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s(t), \quad (5)$$

где (5) $\Phi_s(t)$ – постоянное вдоль поверхности капли значение ее электрического потенциала;

$P(\vec{r}, t) = P_0 - \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$ – гидродинамическое

давление; P_0 – постоянное давление внутри капли в состоянии равновесия; P_{atm} – постоянное давление вне капли в состоянии равновесия;

$P_E = (\nabla\Phi)^2 / 8\pi$ – давление электрического поля,

$P_\sigma = \text{div} \vec{n}(\vec{r}, t)$ – капиллярное давление; $\vec{n}(\vec{r}, t)$ –

единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли:

$$\vec{n}(\vec{r}, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (6)$$

В (6) $r(\theta, t)$ определяется (1).

Дополним выписанную систему интегральными условиями: неизменности полного объема капли (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности ее центра масс, а также незаряженности капли:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi;$$

$$\int_V \vec{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (7)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla\Phi) dS = 0;$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (8)$$

Искомые величины разложим по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций ε :

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi_j(\vec{r}, t) = \psi_j^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P(\vec{r}, t) = P^{(0)}(\vec{r}) + P^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_\sigma(\vec{r}, t) = P_\sigma^{(0)}(\vec{r}) + P_\sigma^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_E(\vec{r}, t) = P_E^{(0)}(\vec{r}) + P_E^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2); \quad (9)$$

где $\Phi^{(0)}(\vec{r})$ – электрический потенциал в окрестности равновесного незаряженного сфероида, находящегося во внешнем электростатическом поле; $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$ – электрический потенциал индуцированных зарядов возмущенного сфероида. Верхний индекс означает порядок малости по ε .

Подставляя разложения (9) в (2)–(8), выделим задачи нулевого и первого порядков.

ЗАДАЧА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Для нахождения равновесной поверхности капли и электрического потенциала $\Phi^{(0)}(\vec{r})$ в окрестности невозмущенной поверхности капли приведем математическую формулировку задачи нулевого порядка малости по ε :

$$\Delta\Phi^{(0)}(\vec{r}) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(\vec{r}) \rightarrow 0; \quad r = r(\theta): \Phi^{(0)}(\vec{r}) = \text{const};$$

$$\begin{aligned}
P^{(0)} - P_{atm} + P_E^{(0)}(\vec{r}) &= P_\sigma^{(0)}(\vec{r}); \\
\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{4}{3}\pi; \quad \int_V \vec{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \\
V &= [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \\
\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}_0(\vec{r}), \nabla \Phi^{(0)}(\vec{r})) dS &= 0; \\
S &= [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (10)
\end{aligned}$$

где $\vec{n}_0(\vec{r})$ – единичный вектор нормали к невозмущенной поверхности сфероидальной капли, определяемый соотношением (6) на поверхности невозмущенного сфероида.

Решив задачу (10) так, как это было проделано в [7, 10], получим выражение для формы равновесной поверхности капли, совпадающее с точностью до квадрата эксцентриситета e^2 с уравнением вытянутого сфероида, в виде:

$$r(\theta) \approx 1 + e^2 h(\theta) + O(e^4) \equiv 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + O(e^4); \quad (11)$$

где эксцентриситет связан с напряженностью электростатического поля соотношением $e \equiv \sqrt{9E_0^2/16\pi}$.

Потенциал $\Phi^{(0)}(\vec{r})$ в линейном по e^2 приближении легко находится. Он может быть получен как переходом от известного выражения [8, с. 41] для электрического потенциала вытянутого проводящего эллипсоида в однородном внешнем поле (приведенного в [8, с. 41] в сфероидальных координатах), так и прямым решением соответствующей электростатической задачи (9) в сферической системе координат методом возмущений [11]:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)}(\vec{r}) &= E_0 r P_1(\mu) \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) + \\
&+ \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} e^2 E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right); \\
\mu &\equiv \cos \theta; \quad (12)
\end{aligned}$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [12].

Решение задачи первого порядка малости по ε . В рассматриваемой задаче имеются два малых параметра: эксцентриситет равновесной поверхности капли e и амплитуда ε ее осцилляций. Следует также учесть, что $E_0 \sim e$. Для нижеследующих расчетов осцилляций капли требуется учитывать слагаемые, имеющие порядок малости $\sim \varepsilon$, слагаемые $\sim e \cdot \varepsilon$ (учитывающие взаимодействие возмущения ξ с напряженностью электростатического поля E_0), слагаемые $\sim e^2 \varepsilon$, учитывающие взаимодействие возмущения с отклонением равновесной поверхности капли от

сферы, слагаемые $\sim E_0 e^2 \varepsilon$, учитывающие взаимодействие возмущения с полем и отклонением равновесной поверхности от сферы.

В силу линейности уравнений (2)–(3) им должны удовлетворять как гидродинамический потенциал $\psi(\vec{r}, t)$, так и каждая из компонент электрического потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$. Решения уравнений (2), (3) для $\psi(\vec{r}, t)$ и $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$, удовлетворяющие граничным условиям (4), и возмущение равновесной формы поверхности капли $\xi(\theta, t)$ запишем в виде рядов:

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^n P_n(\mu); \quad (13)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (14)$$

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu), \quad (15)$$

где на порядок малости указывает степень ε .

Решение задачи для электрического потенциала (в первом порядке малости по ε). Выделим краевую задачу первого порядка по ε для определения электрического потенциала $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$. Система уравнений для определения коэффициентов F_n в решении (14) получается из (4)–(5) путем группировки слагаемых $\sim \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
r &= 1; \\
\Phi^{(1)} + e^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} P_2(\mu) - \\
- 3E_0 \left(1 + e^2 \left(P_1(\mu)^2 - \frac{3}{5} \right) \right) P_1(\mu) \xi(\theta, t) &= \Phi_s^{(1)} \delta_{n,0}; \\
\int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{3} e^2 \left(\left(2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) P_2(\mu) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} + \right. \right. \\
&+ E_0 \left(\frac{18}{5} (4P_3(\mu) + P_1(\mu)) \xi(\theta, t) - \right. \\
&\left. \left. - 9(P_1(\mu))^2 \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \sin \theta d\theta = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\Phi_s^{(1)}$ – поправка первого порядка малости к величине потенциала поверхности капли.

Подставив разложения (14)–(15) в (16), получим выражения для коэффициентов $F_n(t)$ в виде:

$$\begin{aligned}
F_0(t) &= -\frac{6}{35} e^2 M_3(t); \quad \Phi_s^{(1)} = -\frac{6}{35} e^2 M_3(t); \\
F_n(t) &= E_0 \left(3 \left(\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+e^2(M_{n-3}(t)l_1 + M_{n-1}(t)l_2 + M_{n+1}(t)l_3 + M_{n+3}(t)l_4);$$

$$(n \geq 1);$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{2n+1}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{2n+1}.$$

Наконец, подставив полученное выражение в (14), найдем разложение для электрического потенциала $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$ в виде:

$$\Phi^{(1)}(\vec{r}, t) = E_0 \varepsilon \left(\frac{6}{35} \frac{e^2 M_3(t)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \left(\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t) \right) + e^2 (M_{n-3}(t)l_1 + M_{n-1}(t)l_2 + M_{n+1}(t)l_3 + M_{n+3}(t)l_4) \right] r^{-(n+1)} P_n(\mu) \right); \quad (17)$$

$$l_1 = \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)};$$

$$l_2 = \frac{n(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27)}{10(4n^2 - 9)(2n-1)^2};$$

$$l_3 = \frac{n(n+1)(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180)}{10(4n^2 + 8n - 5)(2n+3)^2};$$

$$l_4 = \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}.$$

Решение гидродинамической части задачи (в первом порядке малости по ε). Вывод эволюционного уравнения. В первом порядке малости по ε для определения коэффициентов D_n , M_n в решениях (13), (15) из (5), (7) получим:

$$r=1; \quad \int_0^{\pi} (1 + 2e^2 h(\theta)) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^{\pi} (1 + 3e^2 h(\theta)) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r} + e^2 \left(\frac{\partial^2 \psi(r, \theta, t)}{\partial r^2} h(\theta) - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right);$$

$$P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_{\sigma}^{(1)};$$

$$P^{(1)} = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + e^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} h(\theta) \right);$$

$$P_E^{(1)} = - \frac{3E_0}{4\pi} \left(6E_0 \xi(\theta, t) P_1(\mu) + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) P_1(\mu);$$

$$P_{\sigma}^{(1)} = -(2 + L_0) \xi(\theta, t) + 2e^2 (\xi(\theta, t) L_0 h(\theta) + h(\theta) (2 + L_0) \xi(\theta, t));$$

$$L_0 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

данные выражения позволяют получить соотношения между коэффициентами $M_n(t)$ и $D_n(t)$:

$$M_0(t) = -\frac{2}{3} e^2 M_2(t); \quad M_1(t) = -\frac{3}{5} e^2 M_3(t);$$

$$D_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n(t)}{\partial t} \left(1 - \frac{1}{3n} e^2 (n(n-1) K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n}) \right) - \frac{e^2}{3} \left(\frac{\partial M_{n-2}(t)}{\partial t} \frac{((n-2)(n-3) K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n})}{(n-2)} + \frac{\partial M_{n+2}(t)}{\partial t} \frac{((n+2)(n+1) K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n})}{(n+2)} \right) \right);$$

$$(n \geq 0);$$

$$K_{m,k,n} = \left[C_{k0,m0}^{n0} \right]^2;$$

$$\alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \cdot C_{m-1,k1}^{n0};$$

$C_{m_k, l_p}^{n_j}$ – коэффициенты Клебша-Гордана [12],

отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям $|m-k| \leq n \leq m+k$, а $m+k+n$ – четное.

Кроме соотношений между коэффициентами получим и неоднородное дифференциальное уравнение для нахождения коэффициентов $M_n(t)$ при $n \geq 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_n(t) + \omega_n^2 M_n(t) = e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n-2}(t) \chi_1 + M_{n-2}(t) \chi_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n+2}(t) \chi_3 + M_{n+2}(t) \chi_4 \right);$$

$$\chi_1 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}; \quad \chi_2 = \frac{n^2(n-1)^2(n+2)}{(2n-1)(2n-3)};$$

$$\chi_3 = -\frac{(n+1)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)};$$

$$\chi_4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+9n+10)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

Избавившись от неоднородности, приравняв к нулю правую часть эволюционного уравнения и приняв, что амплитуды $M_n(t)$ зависят от времени t гармонически $\sim \exp(i\omega_n t)$, получим выражение для частоты осцилляций n -й моды (записанное в размерном виде):

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \times \left[1 - e^2 \frac{(2n^5 + 23n^4 + 21n^3 - 17n^2 - 7n - 2)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right], \quad (18)$$

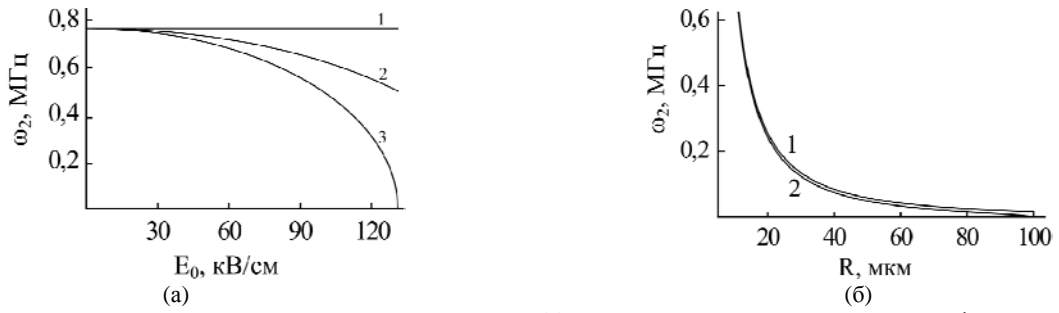


Рис. 1. Зависимости частоты электромагнитного излучения: (а) – основной моды незаряженной сферической капли (кривая 1), частоты электромагнитного излучения сфероидальной капли (кривая 2) и искусственно созданной частоты электромагнитного излучения сфероидальной капли (численный коэффициент при эксцентриситете равен 1,74) (кривая 3), осциллирующей на основной моде во внешнем поле, от напряженности электростатического поля, рассчитанная при $j = 2$, $\varepsilon = 0,1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 10$ мкм; (б) – единичной незаряженной сфероидальной капли (кривая 1) и модифицированной частоты (кривая 2), осциллирующих на основной моде, от радиуса равновеликой сферической капли, рассчитанная при значениях прочих физических величин (см. рис. 1а) и $E_0 = 40$ кВ/см.

качественно совпадающее с полученным в [13], но обладающее асимптотиками, более адекватными реальной ситуации; ω_n – частота собственных осцилляций поверхности незаряженной сфероидальной капли в однородном электростатическом поле.

На рис. 1а прямой 1 обозначена частота основной моды незаряженной сферической капли, кривая 2 показывает зависимость частоты осцилляций основной моды сфероидальной капли от напряженности электростатического поля (зависимость осуществляется через эксцентриситет и определяется размерным выражением $e^2 \equiv 9E_0^2 R / 16\pi\sigma$ [14]). Кривая 3 представляет частоту основной моды незаряженной сфероидальной капли, искусственно подогнанную под реальную ситуацию: известно, что при $(E_0^2 R / \sigma) \geq 2,62$ частота обращается в ноль, а капля претерпевает неустойчивость по отношению к поляризационному заряду [15]. Для того чтобы добиться обращения квадрата частоты в (18) в ноль перед e^2 в квадратных скобках поставим подгоночный параметр 1,74. Конечно, подобный подход для теоретического исследования груб, но позволяет согласовать данные расчета с данными эксперимента [15]. Точный расчет проведен в линейном приближении по e^2 , и его результаты применимы лишь при малых e^2 (там, где $E_0 \approx 50 \div 60$ кВ/см).

Если построить зависимости частоты осцилляций незаряженной сфероидальной капли, находящейся в однородном электростатическом поле, от радиуса равновеликой сферической капли в области $E_0 = 40$ кВ/см, то зависимости 2 и 3 будут иметь качественно и количественно сходный вид, как это видно на рис. 1б. Если построить такие же зависимости при $E_0 = 1$ кВ/см, то они совпадут в пределах толщины линии.

Решением неоднородного эволюционного уравнения являются гармонические функции времени t с коэффициентами:

$$M_n(t) = a_n \exp(i(\omega_n t + b_n)) + \text{к.с.}; (n \geq 0);$$

где a_n и b_n – вещественные константы, определяемые из начальных условий; «к.с.» – сопряженные к выписанным.

Таким образом, на основе (1), (11), (15) для формы поверхности осциллирующей незаряженной сфероидальной капли, находящейся во внешнем однородном электростатическом поле, получим аналитическое выражение:

$$r(\vec{r}, t) = 1 + e^2 h(\theta) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu). \quad (19)$$

Так, форма возмущенной поверхности сфероидальной капли во внешнем поле записана в первом порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε и в линейном приближении по квадрату эксцентриситета e^2 .

ВЕЛИЧИНЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЗАРЯДОВ

Величины поляризационных зарядов каждой из половинок возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$ определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} q_+ &= \int_{S_1} dq_+ = \int_{S_1} v(\theta, t) dS_1; \\ S_1 &\equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \quad (20) \\ q_- &= \int_{S_2} dq_- = \int_{S_2} v(\theta, t) dS_2; \\ S_2 &\equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]. \end{aligned}$$

Здесь q_+ – положительный и q_- – отрицательный поляризационные заряды, а $r(\theta, t)$ определяется выражением (1).

Рассмотрим положительно заряженную половинку капли, расписав в выражении (20) индуцированный заряд, выразим его через поверхностную плотность заряда

$v = v(\vec{r}, t) = -(\vec{n}(\vec{r}, t), \nabla\Phi(\vec{r}, t)) / 4\pi$ на возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$ в виде:

$$q_+ = \int_{S_1} \frac{v(\vec{r}, t)}{(\vec{n}(\vec{r}, t), \vec{e}_r)} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \quad (21)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{(\vec{n}(\vec{r}, t), \nabla\Phi(\vec{r}, t))}{(\vec{n}(\vec{r}, t), \vec{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} \sin\theta d\theta d\varphi;$$

(учтем, что $\Phi(\vec{r}, t) \equiv \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$).

Подставив в (21) разложение для электрического потенциала из (12) и вектор нормали для возмущенной поверхности капли с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon$ при учете (14), (17), найдем величину положительного поляризационного заряда на возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$:

$$q_+(t) = \frac{3}{4} E_0 \times \quad (21a)$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) (G_1(n) + e^2 G_2(n)) \right).$$

Выражения для коэффициентов $G_1(n)$ и $G_2(n)$ из-за громоздкости вынесены в Приложение 1. Видно, что зависящая от времени часть выражения (26) содержит слагаемые $\sim \varepsilon$ и $\sim \varepsilon \cdot e^2$. Целесообразно еще учесть, что $E_0 \sim e$.

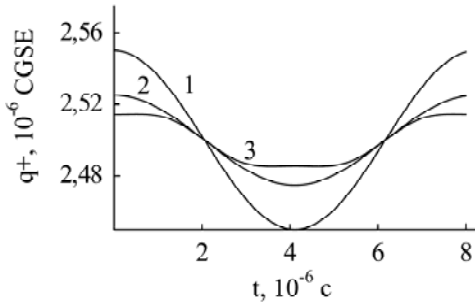


Рис. 2. Зависимость величины положительного поляризационного заряда капли q_+ от времени, рассчитанная при $E_0 = 1000$ В/см ($\sim 8 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$), и прочих физических величин, указанных на рис. 1. Кривая 1 соответствует начальному возбуждению равновесной формы поверхности капли в линейном по ε приближении вида: $\varepsilon P_2(\mu)$, кривая 2 – $\varepsilon [P_2(\mu) + P_3(\mu)] / 2$, кривая 3 – $\varepsilon [P_2(\mu) + P_3(\mu) + P_4(\mu)] / 3$.

На рис. 2 для иллюстрации приведены зависимости q_+ от времени согласно (21a). Видно, что величина индуцированного заряда периодически меняется со временем. При расчетах для определенности эксцентриситет незаряженной капли во внешнем электростатическом поле принимался определенным соотношением $e \equiv \sqrt{9E_0^2 / 16\pi}$ [14].

Аналогично для второй половинки сфероидальной капли получим величину отрицательно-

го поляризационного заряда, отличающуюся от (21a) лишь знаком.

МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ДИПОЛЯ

Таким образом, незаряженную каплю, поляризованную во внешнем электростатическом поле, можно представить как систему двух равных по величине, но противоположных по знаку поляризационных зарядов (изменяющихся по величине при осцилляциях поверхности капли), смещенных относительно друг друга на некоторое расстояние, меньшее диаметра капли. Целесообразно ввести в рассмотрение «эффективные» центры положительного и отрицательного зарядов, определяемые соотношениями:

$$\vec{R}_{q_{\pm}} = \frac{1}{q_{\pm}} \int_{S_{1,2}} \vec{r} dq_{\pm}.$$

Эти центры расположатся на оси симметрии капли (в силу симметричности осцилляций) и при осцилляциях ее поверхности будут также осциллировать. Причем их осцилляции будут происходить в противофазе друг относительно друга (центры будут сближаться и удаляться). Другими словами, получим «эффективный» диполь [8]:

$$\vec{d}(t) = 2q_+(t) \cdot \vec{R}_{q_+}(t); \quad (22)$$

который будет осциллировать и излучать при этом электромагнитные волны.

Интенсивность излучения диполя определена известным выражением ([16, с. 213]:

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2 \vec{d}(t)}{dt^2} \right)^2. \quad (23)$$

В соответствии с (23) аналитическое выражение для мощности электромагнитного излучения единичной капли с учетом (22) легко получить. Для этого необходимо лишь аналитическое выражение для вектора смещения центра индуцированного (например, положительного) заряда сфероидальной капли \vec{R}_{q_+} . В общем виде запишем как:

$$\vec{R}_{q_+}(t) = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} \vec{r} dq_+ = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} r \vec{e}_r dq_+;$$

$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right].$$

Радиальный орт \vec{e}_r сферической системы координат связан с ортами декартовой системы координат:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta. \quad (24)$$

Поскольку вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси z , то смещения центра заряда капли в плоскости x, y не происходит:

$$R_{qx} = R_{qy} = 0.$$

Учитывая выражение (24), запишем проекцию вектора смещения центра положительного поляризационного заряда вдоль оси z в виде:

$$R_{qz}(t) = -\frac{1}{4\pi q_+} \int_{S_1} \frac{(\vec{n}(t), \nabla \Phi(t))}{(\vec{n}(t), \vec{e}_r)} r^3 \Big|_{r=r(0,t)} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (25)$$

После интегрирования по половинке сфероида S_1 легко найти:

$$R_{qz} = \frac{1}{2q_+} E_0 \times \left(1 + \frac{2}{5} e^2 + 3\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) (G_3(n) + e^2 G_4(n)) \right).$$

Подставив в это выражение значение индуцированного заряда (21а), получим окончательное выражение для смещения центра положительного индуцированного заряда незаряженной сфероидальной капли вдоль оси z в первом порядке малости по возмущению поверхности и квадрату эксцентриситета:

$$R_{qz}(t) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \left(3G_3(n) - 2G_1(n) - e^2 \left(\frac{8}{15} G_1(n) + 2G_2(n) + \frac{1}{5} G_3(n) - 3G_4(n) \right) \right) \right). \quad (26)$$

Коэффициенты $G_3(n)$ и $G_4(n)$ приведены в *Приложении 2*. Видно, что зависящая от времени часть выражения (26) содержит слагаемые $\sim \varepsilon$ и $\sim \varepsilon \cdot e^2$.

На рис. 3 для положительного индукционного заряда приведены зависимости $R_{qz}(t)$, согласно (26). Видно, что величина R_{qz} периодически меняется со временем.

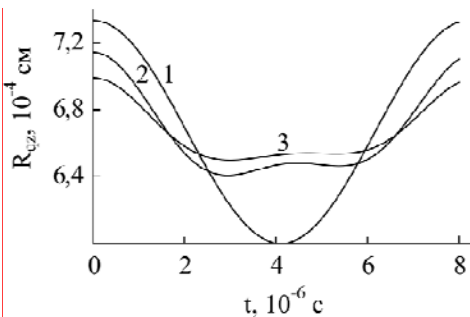


Рис. 3. Зависимость смещения центра положительного поляризационного заряда капли R_{qz} от времени и физических величин, принятых на рис. 2. Кривые 1–3 соответствуют тем же принятым значениям, что на рис. 2.

Аналогичным образом для второй половинки сфероидальной капли получим решение для

смещения центра отрицательного поляризационного заряда, отличающееся лишь знаком.

Для того чтобы получить численные оценки интенсивности излучения, зададим начальные условия в виде начальной деформации равновесной сфероидальной формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности:

$$t=0: \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (27)$$

где h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод.

Удовлетворяя начальным условиям (27), для вещественных констант a_n и b_n получим значения:

$$a_n = \frac{1}{2} h_j \left(\delta_{jn} + e^2 \left(-\delta_{j,n-2} \frac{n(n-1)(3n^2-3n+2)}{4(2n-1)(2n-3)(3n-4)} + \delta_{j,n+2} \frac{(n+1)(3n^3+27n^2+44n+16)}{4(2n+3)(2n+5)(3n+2)} \right) \right);$$

$$b_n = 0; \quad (j \in \Xi \quad n = 0, 1, 2, \dots);$$

где $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера.

В итоге запишем амплитуды первого порядка малости в выражении для формы поверхности колеблющейся капли в виде:

$$M_n(t) = h_n \delta_{j,n} \cos(\omega_n t) + e^2 \left(h_{n-2} \delta_{j,n-2} \frac{n(n-1)(3n^2-3n+2)}{4(2n-1)(2n-3)(3n-4)} (\cos(\omega_{n-2} t) - \cos(\omega_n t)) - h_{n+2} \delta_{j,n+2} \frac{(n+1)(3n^3+27n^2+44n+16)}{4(2n+3)(2n+5)(3n+2)} (\cos(\omega_{n+2} t) - \cos(\omega_n t)) \right);$$

$$(j \in \Xi; \quad n \geq 0).$$

Применяя в полученном выражении размерные переменные, выведем на основе (23) окончательное выражение для интенсивности электромагнитного излучения незаряженной сфероидальной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле:

$$I = \frac{E_0^2 R^6 \varepsilon^2}{3c^3} \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left(G_1(j) + e^2 (G_1^+(j) + G_2^+(j) + G_3^+(j)) \right) \right)^2 \times \left(\sum_{j \in \Xi} h_j \left(\omega_j^2 \left((3G_3(j) - 2G_1(j)) + e^2 \left(-\frac{8}{15} G_1(j) - \frac{1}{5} G_3(j) - 2G_1^+(j) + 3G_1^+(j) \right) \right) + e^2 \left(\omega_{j+2}^2 (2G_3^+(j) - 3G_3^+(j)) + \omega_{j-2}^2 (3G_2^+(j) - 2G_2^+(j)) \right) \right) \right)^2. \quad (28)$$

Выражения для коэффициентов $G_1^\pm(j)$, $G_2^\pm(j)$, $G_3^\pm(j)$ вынесены в *Приложение 3*.

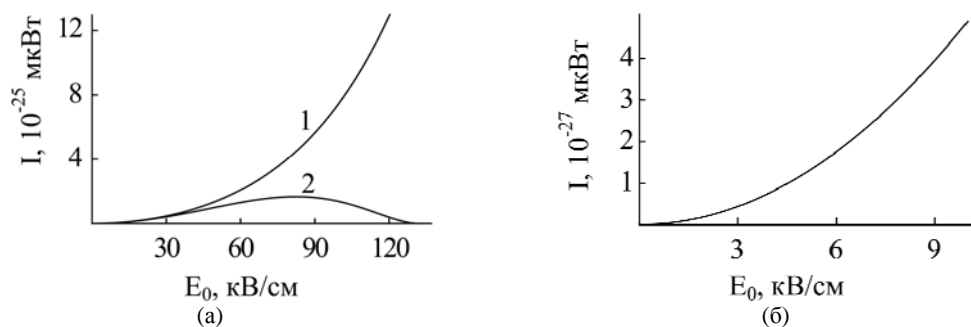


Рис. 4. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле: (а) – рассчитанная по (28) (кривая 1), и интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей с модифицированной частотой (коэффициент при эксцентриситете равен 1,74) (кривая 2), рассчитанные при тех же значениях, что и на рис. 1; (б) – та же зависимость, но рассчитанная в области малых значений напряженности.

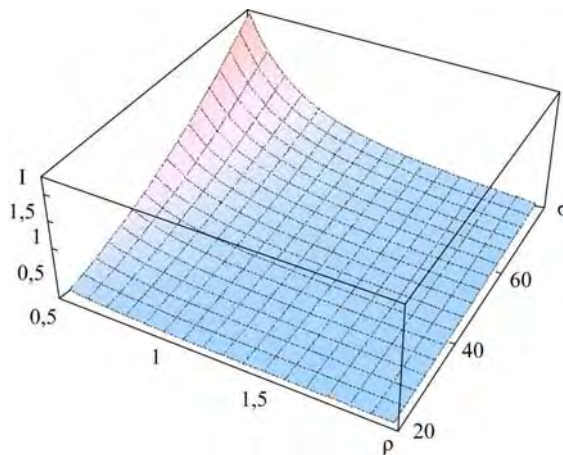


Рис. 5. Зависимость интенсивности излучения (единицы измерения – 10^{-28} мкВ) единичной незаряженной капли от величины коэффициента поверхностного натяжения σ (единицы измерения – дин/см) и плотности жидкости ρ (единицы измерения – г/см³), рассчитанная при $E_0 = 1000$ В/см и прочих тех же значениях.

Несложно из (28) увидеть, что выражение для интенсивности существенно нелинейно: в задаче два малых параметра – ε и e^2 (напомним, что $E_0 \sim e$). В итоге (28) содержит произведения малых параметров до $\sim \varepsilon^5 e^{10}$.

Используя (28), можно оценить величину интенсивности электромагнитного излучения от различных жидкокапельных систем искусственного и естественного происхождения, например таких, как конвективные облака.

Возможный источник электромагнитного излучения связан с осцилляциями основной моды конечной амплитуды мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 мкм. Концентрация n таких капель в облаке ~ 10 см⁻³ [17]. А осцилляции основной моды связаны с движением капель относительно среды [18]. Кроме того, большая амплитуда осцилляций облачных капель может быть вызвана различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие капли в результате процессов столкновения или реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелко-масштабной турбулентностью, характерной для

грозовых облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [19–20], могут достигать десятков процентов от радиуса капли.

Для возможного источника электромагнитного излучения, связанного с колебаниями мелких незаряженных капель, находящихся в электростатическом поле, проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центров поляризационных зарядов связано с возбуждением моды $j = 2$. Для численных оценок при $j = 2$, $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 10$ мкм, $E_0 = 50$ В/см. Тогда из (28) несложно получить $I \sim 1 \cdot 10^{-28}$ мкВ на частоте ≈ 100 кГц.

Следует отметить, что в противоречие с результатами, полученными для интенсивности дипольного излучения от осциллирующей заряженной капли [2], в рассматриваемой в работе ситуации незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, зависимость интенсивности от радиуса капли отсутствует (это видно и из аналитического выражения (28), если учесть зависимость частоты от радиуса). При варьировании радиуса капли изменяется только частота излучения.

Если принять, что все капли осциллируют синфазно, то интегральная интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром 10 км будет в N раз больше, чем интенсивность излучения одной капли (N – число капель в облаке). В рассматриваемом случае $N \approx 5 \cdot 10^{20}$ больше, а значит, интенсивность излучения из облака $I_{in} \sim 5 \cdot 10^8$ мкВ. Это излучение может быть надежно зарегистрировано радиоприемной аппаратурой ([21, с. 24], см. также [3], [6]). Синфазность осцилляций отдельных капель может возникнуть в грозовом облаке при резком изменении напряженности внутриоблачного электрического поля, что имеет место при разряде молнии [6], [22]. Если фазы осцилляции независимы друг от друга, то интегральная интенсивность будет в \sqrt{N} раз больше интенсивности излучения отдельной капли (N – число капель в облаке) [6].

На рис. 4а приведены зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной капли от напряженности внешнего электрического поля, рассчитанные по (28): кривая 1 – частота осцилляций в выражении для интенсивности (28) определена выражением (18), кривая 2 – частота осцилляций определена модифицированным выражением, обращаемся в ноль при критическом значении напряженности поля (кривая 3 на рис. 1). На рис. 4 видно, что в области малых значений напряженности с ее ростом интенсивность излучения быстро увеличивается. Кривая 1 несколько выходит за пределы области своей применимости, которая определяется условием $e^2 \ll 1$, но ее экстраполяция приведена с иллюстрационными целями. В области сильных полей, если частоту определять модифицированным выражением и будет справедлива кривая 2, с увеличением напряженности интенсивность излучения достигает максимума (при $E_0 \sim 80$ кВ/см), а затем начинает уменьшаться (см. кривую 2 на рис. 4а), так как при критическом значении поля частота осцилляций стремится к нулю.

На рис. 4 кривые приведены (с иллюстрационными целями) вплоть до критических (для реализации электростатической неустойчивости капли) значений напряженности поля. В реальности незаряженные облачные капли целесообразно рассматривать только в слабых полях [23]. Но можно также учесть, что наличие слабых зарядов на каплях не отразится значительно в плане усиления интенсивности их электромагнитного излучения и распространит рассмотрение на область сильных полей.

На рис. 5 приведена зависимость интенсивности излучения от плотности жидкости и величины ее коэффициента поверхностного натяжения

(следует подчеркнуть, что, согласно (28), интенсивность излучения зависит от плотности жидкости и величины коэффициента поверхностного натяжения не только через частоту, но и через эксцентриситет).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электромагнитное излучение незаряженной капли проводящей жидкости, осциллирующей в электростатическом поле, определяется излучением ускоренно движущихся зарядов, индуцированных в капле внешним электростатическим полем. Сопоставляя заряды противоположных знаков, индуцированных на противоположных половинках капли, «эффективные» заряды на оси капли, получим осциллирующий диполь, чей момент меняется при осцилляциях. Его излучением и моделируем излучение осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли. Само излучение обнаруживается в нелинейных асимптотических расчетах и является дипольным в отличие от квадрупольного, обнаруживаемого уже в линейных расчетах, и в $10^{14} \div 10^{15}$ раз менее интенсивного, чем дипольное, и практически не влияющего на общую интенсивность.

Приложение 1. Аналитические выражения для коэффициентов $G_1(n)$ и $G_2(n)$ в (21а):

$$G_1(n) = \frac{1}{(2n+1)} \left(n^2 F_{n-1} + (n+1)(n+2) F_{n+1} \right);$$

$$G_2(n) = -\frac{2}{35} \delta_{n,3} + \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{5n(n-1)(n-2)^2}{2(2n-3)(2n-1)} F_{n-3} + \frac{n^2(146n^3 + 73n^2 - 246n - 153)}{30(2n-3)(2n+1)(2n+3)} F_{n-1} + \frac{(n+1)(n+2)(26n^3 + 65n^2 + 46n - 20)}{30(2n-1)(2n+1)(2n+5)} F_{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)} F_{n+3} \right);$$

$$F_n = \int_0^{\pi/2} P_n(\mu) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 1 & (n=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!}{2^{n-1} (n+1) \left(\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right)^2} & (n=2k+1); \\ 0 & (n=2k). \end{cases}$$

Приложение 2. Выражения для коэффициентов $G_3(n)$ и $G_4(n)$ в (26):

$$G_3(n) = \frac{(n+1)}{(2n+1)} \times \left(\frac{n(n-1)}{(2n-1)} F_{n-2} + \frac{(4n^3 + 10n^2 + 2n - 3)}{(2n-1)(2n+3)} F_n + \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)} F_{n+2} \right);$$

$$G_4(n) = -\frac{1}{35} \delta_{n,3} + k_1 F_{n-4} + k_2 F_{n-2} + k_3 F_n + k_4 F_{n+2} + k_5 F_{n+4};$$

$$k_1 = \frac{3n(n-1)^2(n-2)(n-3)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)};$$

$$k_2 = \frac{n(n-1)(376n^5 - 736n^4 - 1198n^3 + 154n^2 + 777n - 45)}{15(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+1)};$$

$$k_3 = \frac{2(n+1)(136n^6 + 484n^5 + 106n^4 - 925n^3 - 809n^2 - 66n + 90)}{15(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+1)};$$

$$k_4 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(136n^4 + 936n^3 + 1606n^2 + 36n - 365)}{15(2n+7)(2n+5)(2n+3)(2n+1)(2n-1)(2n+1)};$$

$$k_5 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{(2n+7)(2n+5)(2n+3)(2n+1)}.$$

Приложение 3. Аналитические выражения для коэффициентов $G_1^\pm(j)$, $G_2^\pm(j)$, $G_3^\pm(j)$ в (28):

$$G_1^+(j) = \frac{2}{35} \delta_{j,3} F_0 + p_1 F_{j-3} + p_2 F_{j-1} + p_3 F_{j+1} + p_4 F_{j+3};$$

$$p_1 = \frac{3(j-1)(j-2)^2(j^3 - 7j^2 + 4j + 4)}{4(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)};$$

$$p_2 = \frac{j(180j^7 - 1212j^6 + 251j^5 + 2985j^4 + 25j^3 - 3453j^2 + 324j + 540)}{60(2j-3)(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)};$$

$$p_3 = \frac{(j+1)(j+2)(180j^6 + 1572j^5 + 4771j^4 + 6319j^3 + 2816j^2 - 988j - 720)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(2j+5)(3j+2)};$$

$$p_4 = \frac{3(j+1)^2(j+2)(j+3)(j+4)^2}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(3j+2)};$$

$$G_2^+(j) = \frac{(j-1)(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)} \left(j(j-1)F_{j-1} + (j-2)^2 F_{j-3} \right);$$

$$G_3^+(j) = \frac{(j+1)(j+2)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)} \left((j+4)(j+3)F_{j+3} + (j+2)^2 F_{j+1} \right);$$

$$G_1^-(j) = -\frac{2}{35} \delta_{j,3} F_1 + q_1 F_{j-4} + q_2 F_{j-2} + q_3 F_j + q_4 F_{j+2} + q_5 F_{j+4};$$

$$q_1 = -\frac{3(j-1)^2(j-2)(j-3)(3j^3 - 27j^2 + 20j + 12)}{4(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)};$$

$$q_2 = -\frac{(j-1)}{60(2j-5)(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)} \times$$

$$\times (720j^9 - 8664j^8 + 20468j^7 + 9762j^6 - 56530j^5 + 17109j^4 + 25712j^3 - 837j^2 - 4320j - 540);$$

$$q_3 = \frac{(j+1)}{30(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)^2(3j-4)(3j+2)} \times$$

$$\times (19584j^{10} + 84144j^9 + 17104j^8 - 327136j^7 - 329116j^6 + 317277j^5 + 517866j^4 + 9421j^3 - 176508j^2 - 19116j + 17280);$$

$$q_4 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)^2(2j+5)(2j+7)(3j+2)} \times$$

$$\times (720j^7 + 11544j^6 + 65836j^5 + 166470j^4 + 180340j^3 + 47181j^2 - 38771j - 17520);$$

$$q_5 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)(3j^2 + 21j + 16)}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(2j+7)(3j+2)};$$

$$G_2^-(j) = \frac{(j-1)(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)} \left(\frac{j(j-1)(j+1)}{(2j-1)} F_j + \frac{(j-1)(4j^3 - 14j^2 + 10j + 1)}{(2j-1)(2j-5)} F_{j-2} + \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{(2j-5)} F_{j-4} \right);$$

$$G_3^-(j) = \frac{(j+1)(j+2)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)} \left(\frac{(j+3)(j+4)(j+5)}{(2j+7)} F_{j+4} + \frac{(j+3)(4j^3 + 34j^2 + 90j + 73)}{(2j+7)} F_{j+2} + \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{(2j+3)} F_j \right).$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяева С.О. *ЖТФ*. 2002, **72**(4), 15–19.
2. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю. *ЖТФ*. 2016, **86**(3), 41–50.
3. Белоцерковский А.В., Дивинский Л.И. и др. *Активно-пассивная радиолокация грозových и грозоопасных очагов в облаках*. СПб: Гидрометеоздат, 1992. 286 с.
4. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. *ДАН СССР*. 1982, 262(6), 1344–1347.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О. *Известия РАН. МЖГ*. 2002, (5), 67–73.
6. Богатов Н.А. *Сборник тезисов докладов VI Международной конференции «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений»*. Петропавловск-Камчатский. 9–13 сентября 2013. ДВО РАН. С. 11–12.
7. Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю., Григорьев А.И., Артемова Т.К. *ЖТФ*. 2015, **85**(4), 20–27.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 621 с.
9. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
10. Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2015. **85**(8), 33–39.
11. Найфе А.Х. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
12. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 436 с.

13. Cheng K.J. *Phys Lett.* 1985, **A112**(11), 392–396.
14. O' Kanski C.J., Thacher H.C. *J Phys Chem.* 1953. **57**, 955–958.
15. Taylor G.I. *Proc Roy Soc London.* 1964. **A280**, 383–397.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: Наука, 1973. 504 с.
17. Мазин И.П., Шметер С.М. *Облака. Строение и физика образования.* Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 733 с.
19. Стерлядкин В.В. *Известия АН СССР. ФАО.* 1988, **24**(6), 613–621.
20. Beard Kenneth V., Токау Аli. *Geophys Res Lett.* 1991, **18**(12), 2257–2260.
21. Аджиев А.Х., Богаченко Е.М. *Грозы Северного Кавказа – Нальчик:* Полиграфсервис и Т, 2011, 151 с.
22. Юман М. *Молния.* М: Мир, 1972. 328 с.
23. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. *Облака и облачная атмосфера.* Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.

Summary

Nonlinear asymptotic calculations for two small parameters (the size of the dimensionless stationary deformation of an initially spherical drop and that of the dimensionless amplitude of its capillary oscillation) were used to analyze the electromagnetic radiation of an uncharged drop oscillating in an electrostatic field. In the external electrostatic field, on the top of the drop, electric charges of the opposite signes are formed and the “effective” charges on the axes of its symmetry can be assigned to them, respectively. As the distance between those “effective” charges is of the order of the drop radius, those charges create a dipole, that at distances much longer than the drop dimensions, builds up an electric field, the same as that of the drop. At the oscillations of the surface of the drop the dipole will also oscillate, which will lead to the generation of electromagnetic waves of a dipolar type.

Keywords: uncharged drop, electrostatic field, oscillation, dipolar electromagnetic radiation.