

Асимптотический анализ электромагнитного излучения незаряженной сфероидальной капли, осциллирующей в электростатическом поле

*С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Рассмотрены осцилляции незаряженной сфероидальной капли проводящей жидкости в однородном электростатическом поле. Показано, что осцилляции центров индуцированных зарядов разных знаков, связанные с осцилляциями поверхности, приводят к излучению электромагнитных волн дипольного типа. Построена математическая модель электромагнитного излучения и проведена оценка его интенсивности в зависимости от размеров капли и напряженности внешнего поля.

Ключевые слова: незаряженная капля, электростатическое поле, осцилляции, излучение электромагнитных волн.

УДК 551.594

ВВЕДЕНИЕ

Задача об электромагнитном излучении от заряженной или незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, представляет интерес в связи с актуальностью проблемы пассивной радиолокации метеорологических объектов различных типов [1]. В данном рассмотрении ограничимся модельной задачей о расчете дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей незаряженной капли, имеющей во внешнем электростатическом поле равновесную форму, близкую к вытянутому по полю сфероиду.

В общем случае электромагнитное излучение объекта состоит из трех компонент: дипольной (самая интенсивная компонента), квадрупольной (вторая по интенсивности компонента, на много порядков величины слабее дипольной) и магнитно-дипольной (самая слабая, на много порядков слабее квадрупольной компоненты) [2, с. 230]. Когда имеется дипольное излучение, квадрупольное на его фоне незаметно [2]. Когда нет дипольного излучения, самое интенсивное излучение – квадрупольное. Именно оно и предсказано в [3] в асимптотических расчетах первого порядка малости по амплитуде осцилляций для заряженной капли (дипольное излучение в расчетах первого порядка малости в случае заряженной капли запрещено условием неподвижности центра масс). С учетом поправок [4] квадрупольное излучение и принимается за электромагнитное излучение от заряженной капли (см. также [5]). Но, как показано в [6–7], электромагнитное излучение от заряженной капли можно рассчитать и в нелинейных асимптотических приближениях, когда запрет на дипольное излучение снимается и интенсивность

дипольного излучения оказывается гораздо выше, чем в расчетах [3–5].

В настоящем анализе проводится асимптотический расчет интенсивности электромагнитного излучения в более высоком порядке малости, чем первый, позволяющий оценить по порядку величины интенсивность дипольного излучения от незаряженной сфероидальной капли, осциллирующей с конечной амплитудой во внешнем электростатическом поле.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об электромагнитном излучении незаряженной капли идеальной несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью \vec{E}_0 . Примем, что капля находится в вакууме, ее объем определяется объемом сферы с радиусом R . Под влиянием внешнего электростатического поля происходят индуцированное зарядение половинок капли зарядами равной величины, но противоположных знаков (отрицательный заряд индуцируется на половинке капли, ориентированной навстречу внешнему полю, положительный – на противоположной половинке), а также вытягивание капли по полю в фигуру, близкую к вытянутому сфероиду. Вытягивание капли наблюдается в результате взаимодействия индуцированных зарядов и внешнего поля. В целом капля остается электронеутральной.

Рассмотрим каждую из половинок капли. Проинтегрировав поверхностную плотность заряда ν по поверхности каждой половинки капли (S_1 и S_2), получим величины разноименных поляризационных зарядов в виде:

$$\begin{aligned}
 q_+ &= \int_{S_1} dq_+ = \int_{S_1} v dS_1; \\
 q_- &= \int_{S_2} dq_- = \int_{S_2} v dS_2;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где q_+ – положительный и q_- – отрицательный поляризационные заряды, причем $|q_+| = |q_-|$. Хотя, как уже отмечалось, заряды непрерывно распределены по поверхности половинок капли, каждому из них можно поставить в соответствие «эквивалентный» заряд, расположенный внутри капли. Положение таких «эффективных» зарядов \vec{R}_q рассчитывается по формуле [8]:

$$\vec{R}_q = \frac{1}{q} \int_{S_j} \vec{r} dq;
 \tag{2}$$

где \vec{r} – радиус-вектор; S_j – (в нашем случае) площадь одной из половинок капли, по которой ведется интегрирование; dq – заряд элемента поверхности капли.

Таким образом, незаряженную каплю во внешнем электростатическом поле можно представить как систему двух индуцированных, равных по величине, противоположных по знаку зарядов. Центры этих зарядов смещены друг от друга на расстояние порядка радиуса капли, а всю систему формально можно рассматривать как диполь, электрическое поле которого на больших расстояниях вне капли совпадает с полем системы индуцированных зарядов.

Учтем, что на поверхности капли существует капиллярное движение, возбуждаемое уже тепловым движением молекул [9]. Амплитуда таких осцилляций весьма мала: $\sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. При температурах порядка комнатной такая амплитуда для всех жидкостей меньше ангстрема. Однако амплитуды некоторых из мод осцилляций под влиянием внешних условий могут увеличиваться. Поскольку индуцированные заряды распределяются по возмущенной осцилляциями поверхности капли, положения «эффективных» зарядов при указанных осцилляциях тоже осциллируют, но с другими амплитудами и частотами. Будут осциллировать со временем и величины поляризационных зарядов, так как при осцилляциях меняется и величина поверхностной плотности зарядов на половинках капли. В результате при осцилляциях поверхности капли как величины, так и центры индуцированных зарядов осциллируют со временем возле положений равновесия и, следовательно, излучают электромагнитные волны.

Не ограничивая общности, будем рассматривать только осесимметричные осцилляции, что

позволит существенно уменьшить громоздкость вычислений. В этом случае центры «эффективных» зарядов будут лежать на оси симметрии сфероида.

Интенсивность дипольного излучения для ускоренно движущегося заряда q определяется выражением [2]:

$$I = \frac{2}{3c^3} \frac{\partial^2 \vec{d}(t)}{\partial t^2},$$

где \vec{d} – дипольный момент, определяемый формулой:

$$\vec{d}(t) = q(t) \cdot \vec{R}_q(t);$$

где $\vec{R}_q(t)$ – вектор положения центра «эффективного» заряда (2).

Для того чтобы определить величины и положения центров «эффективных» зарядов, рассмотрим эволюцию во времени формы осциллирующей поверхности незаряженной капли. Все расчеты задачи будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Выражение для формы равновесной поверхности капли, совпадающее с точностью до квадрата эксцентриситета e^2 с уравнением вытянутого сфероида, имеет вид [10]:

$$\begin{aligned}
 r(\theta) &\approx 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + O(e^4); \\
 e &\equiv \sqrt{\frac{9E_0^2}{16\pi}}.
 \end{aligned}$$

Равновесный потенциал $\Phi_{eq}(r, \theta)$ в окрестности проводящего незаряженного жесткого сфероида, помещенного в коллинеарное внешнее однородное электростатическое поле \vec{E}_0 , может быть получен, например, переходом к сферическим координатам с последующим разложением по степеням эксцентриситета e известного выражения, полученного в [11, с. 11], в сфероидальных координатах. Точно такое же выражение для $\Phi_{eq}(r, \theta)$ можно получить и прямым решением соответствующей электростатической задачи, используя разложение по степеням e в окрестности исходной сферы, на основе метода возмущений [12].

Положения центров «эквивалентных» зарядов и их величины для жесткого сфероида легко вычисляются в виде (например, для положительного заряда):

$$R_z^{(+)} = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right); \quad q_+ = \frac{3}{4} R^2 E_0 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right).$$

Если рассмотреть не жесткий сфероид, а осциллирующую каплю, то положение $R_z^{(+)}$ и величина q_+ будут изменяться, и можно сформулировать задачу об электромагнитном излучении при осцилляциях поверхности капли (при изменении $R_z^{(+)}$ и q_+).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сфероидальная форма капли с эксцентриситетом e претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной амплитуды ε , существенно меньшей радиуса капли. Примем, что уравнение линии, вращением которой получается поверхность капли, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} r(\theta, t) &= r(\theta) + \xi(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) + \xi(\theta, t) \equiv \\ &\equiv 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t); \\ |\xi(\theta, t)| &\ll 1; \quad \mu \equiv \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_n(\mu)$ – осесимметричный полином Лежандра порядка n .

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, и примем, что поле скоростей движения жидкости $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla\psi(\vec{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\vec{r}, t)$, величина которого имеет тот же порядок малости, что и амплитуда осцилляций поверхности капли $\psi(\vec{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

Математическая формулировка задачи имеет вид [3, 5]:

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta;$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta P - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + P_E = P_\sigma; \quad (6)$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s(t). \quad (7)$$

Дополним выписанную систему естественными интегральными условиями: неизменностью полного объема капли (следствие несжимае-

мости жидкости), неподвижностью ее центра масс, а также незаряженностью капли:

$$\begin{aligned} \int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{4}{3}\pi; \\ \int_V \vec{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V &= [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla\Phi) dS = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S &= [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \end{aligned}$$

В выражениях (6)–(7), (9) введены следующие обозначения: ΔP – перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\Phi_s(t)$ – постоянное вдоль поверхности капли значение ее электрического потенциала; $P_E \equiv (\nabla\Phi)^2 / 8\pi$ – давление электрического поля, $P_\sigma \equiv \text{div} \vec{n}$ – капиллярное давление; \vec{n} – единичный вектор нормали, определяемый выражением:

$$\vec{n} = \frac{\nabla(r - r(\theta, t) - \xi(\theta, t)) \Big|_{r=r(\theta, t)}}{\left| \nabla(r - r(\theta, t) - \xi(\theta, t)) \right| \Big|_{r=r(\theta, t)}}.$$

В рассматриваемой задаче имеются два малых параметра: эксцентриситет равновесной поверхности капли e и амплитуда ε ее осцилляций. Для определенности установим фиксированное соотношение между малыми параметрами, то есть примем, что $e^2 \sim \varepsilon$, сводя тем самым задачу к одному малому параметру ε . При дальнейшем анализе задачи будем учитывать в разложениях слагаемые, имеющие порядок малости не выше, чем $\sim \varepsilon^{3/2}$. Это означает, что слагаемые $\sim E_0 \cdot e^2 \cdot \varepsilon \sim \varepsilon^{5/2}$ будут отброшены. Учитываемый порядок малости достаточен для оценки интенсивности дипольного излучения капли по порядку величины, а слагаемые более высокого порядка дадут лишь малую поправку.

Ввиду того что $e^2 \sim E_0^2 \sim \varepsilon$, а $E_0 \sim e \sim \varepsilon^{1/2}$, для удобства дальнейших разложений, чтобы иметь возможность в конечных выражениях легко вернуться к физическим величинам E_0 и e^2 , введем формальные параметры-маркеры β_E, β_e в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E_0 &\equiv \beta_E \cdot \varepsilon^{1/2}, \\ e^2 &\equiv \beta_e \cdot \varepsilon, \text{ где } \beta_E = \beta_e = 1. \end{aligned}$$

Электростатический потенциал $\Phi_{eq}(r, \theta)$ в окрестности равновесного незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле при этом примет вид:

$$\Phi_{eq}(r, \theta) = \varepsilon^{1/2} \beta_E r P_1(\mu) \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} \varepsilon^{3/2} \beta_E \beta_e \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right). \quad (10)$$

Выражения для возмущения равновесной формы поверхности осциллирующей сферoidalной капли $\xi(\theta, t)$ и решения уравнений (4) для гидродинамического $\psi(\vec{r}, t)$ и электростатического $\Phi_\xi(\vec{r}, t)$ потенциалов, происходящих из-за капиллярного возмущения свободной поверхности, представим в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu); \quad (11)$$

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^n P_n(\mu); \quad (12)$$

$$\Phi_\xi(r, \theta, t) = \varepsilon^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (13)$$

РАСЧЕТ

Для определения коэффициентов D_n , M_n в решениях (11), (12) из уравнений (5), (6), (8) в первом порядке малости по ε получаем систему:

$$r=1: \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r};$$

$$\frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t} = (2 + L_0) \xi(\theta, t);$$

$$\int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0,$$

$$L_0 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

которая позволяет вывести следующие соотношения для коэффициентов:

$$M_0(t) = 0; \quad M_1(t) = 0; \quad D_0(t) = 0; \quad D_1(t) = 0;$$

$$D_n(t) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n(t)}{\partial T_0}; \quad (n \geq 2) \quad (14)$$

и однородное дифференциальное уравнение для нахождения коэффициентов $M_n(t)$ при $n \geq 2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_n(t) + \omega_n^2 M_n(t) = 0, \quad (15)$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2),$$

где ω_n – безразмерная частота собственных колебаний поверхности незаряженной сферической капли. Следует отметить, что при $E_0 \rightarrow 0$ выполняется также $e \rightarrow 0$, то есть все решение строится в окрестности сферы.

Решением уравнения (15) являются гармонические функции времени t :

$$M_n(t) = a_n \exp[i(\omega_n t + b_n)] + \text{к.с.}; \quad (n \geq 2), \quad (16)$$

где a_n и b_n – вещественные константы, определяемые из начальных условий; аббревиатура «к.с.» означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

Таким образом, используя (3), (11) для образующей формы поверхности осциллирующей незаряженной капли, находящейся во внешнем однородном электростатическом поле, получим аналитическое выражение:

$$r(\theta, t) = 1 + \beta_e \varepsilon h(\theta) + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu), \quad (17)$$

в котором амплитудные коэффициенты $M_n(t)$ определяются (14).

Представляя электростатический потенциал в виде разложения

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{eq}(r, \theta) + \Phi_\xi(r, \theta, t), \quad (18)$$

выделим краевую задачу порядка $\varepsilon^{3/2}$ для определения электрического потенциала $\Phi_\xi(r, \theta, t)$, связанного с возмущением равновесной поверхности капли, осциллирующей во внешнем электрическом поле. Система уравнений для определения коэффициентов F_n в (13) получается из (4), (7), (9) и (14) группировкой слагаемых: $\sim \varepsilon^{3/2}$.

Используя разложения (11), (13), получим следующие соотношения между коэффициентами:

$$F_0(t) = 0; \quad \Phi_s = 0;$$

$$F_n(t) = 3\beta_E (\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t)); \quad (n \geq 1). \quad (19)$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \mu_n^- = \frac{n}{2n+1}.$$

Наконец, подставив (19) в (13) и перейдя от комбинации $\beta_E \varepsilon^{1/2}$ к величине E_0 , запишем выражение для компоненты электрического потенциала $\Phi_\xi(r, \theta, t)$ в виде:

$$\Phi_\xi(r, \theta, t) = 3E_0 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t)) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (20)$$

ВЕЛИЧИНЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЗАРЯДОВ

Величины поляризационных зарядов каждой из половинок возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$ определяются уравнениями (1), если принять, что $\nu \equiv \nu(\theta, t)$ – поверхностная плотность заряда на возмущенном сфероиде, а S_1 и S_2 определены как:

$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

$$S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right].$$

Рассмотрим положительно заряженную половинку капли, используя поверхностную плотность заряда $\nu = \nu(\theta, t)$ на возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$:

$$q_+ = \int_{S_1} \frac{\nu(\theta, t)}{(\vec{n}, \vec{e}_r)} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi; \quad (21)$$

$$\nu(\theta, t) = -\frac{1}{4\pi} (\vec{n}, \nabla \Phi) \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (22)$$

Подставив в (22) разложение (18), с учетом (10), (17) и (20), а также вектора нормали для возмущенной поверхности капли:

$$\begin{aligned} \vec{n} = & \left(1 - \frac{1}{2} \left(\varepsilon \beta_e \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \vec{e}_r - \\ & - \left(1 - (\varepsilon \beta_e h(\theta) + \xi(\theta, t)) \right) \times \\ & \times \left(\varepsilon \beta_e \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta, \end{aligned} \quad (23)$$

получим выражение для поверхностной плотности индуцированного заряда. В (23) \vec{e}_r и \vec{e}_θ – орты сферической системы координат. Затем, учитывая вид функции $\xi(\theta, t)$ (11), решение (18), (10), (20) для потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$ и переходя от введенных формальных параметров $\beta_E \cdot \varepsilon^{1/2}$, $\beta_E \cdot \varepsilon$ к величинам E_0 и e^2 , запишем подынтегральное выражение в (21) на возмущенной поверхности вытянутой сфероидальной капли (17):

$$\begin{aligned} \frac{\nu(\theta, t)}{(\vec{n}, \vec{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} = & \frac{3}{4\pi} E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{1}{15} e^2 (1 + 15 \cos(2\theta)) P_1(\mu) + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \frac{1}{(2n+1)} (n^2 P_{n-1}(\mu) + (n+1)(n+2) P_{n+1}(\mu)) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив (24) в (21) и интегрируя по половинке сфероида S_1 , найдем величину положительного индуцированного заряда на возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$:

$$q_+ = \frac{3}{4} E_0 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) G_1(n) \right); \quad (25)$$

$$G_1(n) = \frac{1}{(2n+1)} \left(n^2 F_{n-1} + (n+1)(n+2) F_{n+1} \right);$$

$$F_n = \int_0^{\pi/2} P_n(\mu) \sin \theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} 1 & (n=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!}{2^{n-1} (n+1) \left(\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right)^2} & (n=2k+1); \\ 0 & (n=2k). \end{cases}$$

Аналогично для второй половинки сфероидальной капли получим величину отрицательного индуцированного заряда, отличающегося лишь знаком.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Интенсивность электромагнитного излучения от единичной капли I в соответствии с известным выражением [3] запишем в виде:

$$I = \frac{4}{3c^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{R}_{q_\pm}(t) \cdot q_\pm(t))_{\max} \right)^2;$$

где индексом «max» обозначены максимальные значения функций.

Для определения положения центра индуцированного заряда половинки капли учтем, что радиальный орт \vec{e}_r сферической системы координат связан с ортами декартовой системы координат соотношениями:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta.$$

Поскольку мы рассматриваем осесимметричные осцилляции, то смещения центров зарядов капли в плоскости x, y не происходит:

$$R_{qx} = R_{qy} = 0. \quad (26)$$

Учитывая выражение (26), запишем проекцию вектора смещения центра положительного индуцированного заряда вдоль оси z согласно (2) в виде:

$$R_{qz} = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} \frac{\nu(\theta, t)}{(\vec{n}, \vec{e}_r)} r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Откуда, используя выражения для поверхностной плотности (22) индуцированного заряда и для вектора нормали (23), получим:

$$R_{qz} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} M_n(t) (3G_2(n) - 2G_1(n)) \right);$$

$$G_2(n) = \frac{(n+1)}{(2n+1)} \times \quad (27)$$

$$\times \left(\frac{n(n-1)}{(2n-1)} F_{n-2} + \frac{(4n^3 + 10n^2 + 2n - 3)}{(2n-1)(2n+3)} F_n + \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)} F_{n+2} \right).$$

Аналогичным образом для второй половинки сфероидальной капли определим выражение для смещения центра отрицательного заряда.

Для того чтобы получить численные оценки интенсивности излучения, зададим начальные условия в виде начальной деформации равновесной сфероидальной формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности:

$$t = 0: \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu);$$

$$\sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \varepsilon \ll 1; \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (28)$$

где h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных мод.

Удовлетворяя начальным условиям (28), для вещественных констант a_n и b_n в выражении (16) получим значения:

$$a_n = \frac{1}{2} h_j \delta_{n,j}; \quad b_n = 0; \quad (j \in \Xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots); \quad (29)$$

где $\delta_{n,j}$ – символ Кронекера.

Подставив выражения (29) в (16), запишем амплитуды первого порядка малости в выражение для формы поверхности осциллирующей капли в виде:

$$M_0(t) = M_1(t) = 0;$$

$$M_n(t) = \delta_{n,j} h_j \cos(\omega_n t); \quad (j \in \Xi; \quad n \geq 2).$$

В итоге выражения для величины положительного индуцированного заряда (25) и для положения его центра (27) примут вид:

$$q_+ = \frac{3}{4} E_0 R^2 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) G_1(j) \right); \quad (30)$$

$$R_{qz} = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) (3G_2(j) - 2G_1(j)) \right). \quad (31)$$

Вычисляя вторую производную по времени от смещений центров индуцированных зарядов капли (31), пренебрегая в (30) слагаемыми $\sim \xi$, получим окончательное выражение для максимального значения интенсивности электромагнитного излучения незаряженной сфероидальной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле:

$$I = \frac{E_0^2 R^6 \varepsilon^2}{3c^3} \left[\left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left(\sum_{j \in \Xi} h_j \omega_j^2 (3G_2(j) - 2G_1(j)) \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left(\sum_{j \in \Xi} h_j \omega_j^2 G_1(j) \right) \right]^2. \quad (32)$$

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Возможный источник электромагнитного излучения от облаков связан с осцилляциями конечной амплитуды мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 мкм. Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ [13–14]. Осцилляции большой амплитуды облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате процессов столкновения или реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды колебаний, согласно данным натурных наблюдений [15–16], могут достигать десятков процентов от радиуса капли.

Проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центров индуцированных зарядов связано с возбуждением моды $j = 2$. Для численных оценок примем: $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $E_0 = 50 \text{ В/см}$ ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ для $R = 3 \text{ мкм}$ и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ для $R = 30 \text{ мкм}$; $E_{0кр}$ – напряженность внешнего поля, критическая для реализации электростатической неустойчивости). Тогда из (32) для капли радиусом $R = 30 \text{ мкм}$ можно получить $I \sim 2 \cdot 10^{-31} \text{ мВт}$ на частоте $\approx 100 \text{ кГц}$.

Интегральная интенсивность электромагнитного излучения облака, состоящего из N капель, будет в N раз больше, если все капли осциллируют синфазно. Это может иметь место при резком изменении напряженности внутриоблачного поля, что бывает при разряде молнии. Следует отметить, что с изменением размера капель мощность излучения от капли практически не меняется. Это можно увидеть и из (32), если расписать выражение для частоты осцилляций в размерном виде. Данным обстоятельством рассматриваемая задача отличается как от нелинейного (дипольного) излучения заряженной капли [6], так и от линейного (квадрупольного) излучения незаряженной капли во внешнем электростатическом поле [17]. Если капли осциллируют независимо друг от друга, интегральная интенсивность увеличится в \sqrt{N} раз.

На рис. 1 приведена зависимость интенсивности излучения от напряженности внешнего электрического поля. Видно, что с увеличением напряженности электростатического поля интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении напряженности поля в 3 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок.

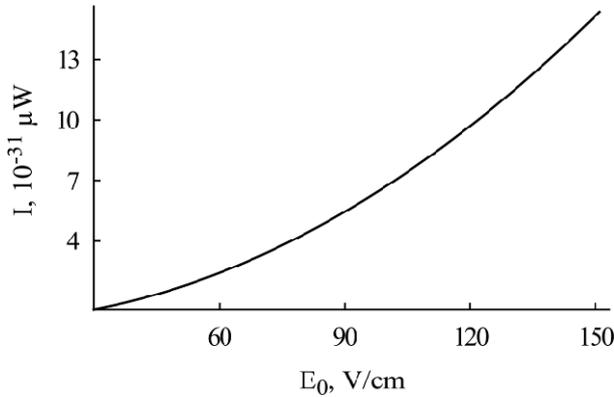


Рис. 1. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся во внешнем слабом электрическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при $j = 2$, $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 30$ мкм.

На рис. 2 приведена зависимость частоты излучения (частоты осцилляций капли) от радиуса сферической капли. Видно, что с увеличением размера внутриоблачной капли частота излучения снижается примерно по гиперболическому закону.

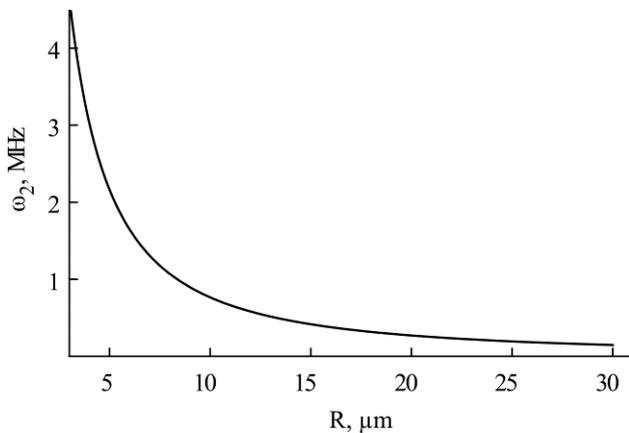


Рис. 2. Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся во внешнем слабом электростатическом поле, от радиуса капли, рассчитанная при таких же значениях физических величин, что и на рис. 1, и $E_0 = 50$ В/см ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ для $R = 3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ для $R = 30$ мкм).

Второй возможный источник электромагнитного излучения облака связан, согласно [3], со свободно падающими гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Примем, что радиус гидрометеора $R = 100$ мкм. Концентрация таких гидрометеоров в облаке, согласно данным

наблюдений [13–14], достаточно высока $\sim 10^3$ м⁻³, а скорость их свободного падения имеет величину ≈ 78 см/с. При такой скорости падения сквозь облако капля с радиусами от 3 до 30 мкм и с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон от 3 до 7 мкм, гидрометеор будет испытывать каждую секунду около 22 столкновений, в результате чего в нем будут возбуждаться осцилляции мод с $n \in \{2 \div 30\}$.

Проведем оценку интенсивности излучения для второго источника излучения, полагая $E_0 = 50$ В/см ($\sim 1 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ для $R = 80$ мкм и $\sim 2 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ для $R = 150$ мкм). Тогда интенсивность составит $I \sim 1 \cdot 10^{-31}$ μW на частоте около 8 кГц.

На рис. 3–4 приведены графики, связанные со вторым источником излучения, аналогичные приведенным на рис. 1–2. Из сравнения данных, приведенных на рис. 3–4, с данными рис. 1–2 несложно видеть, что электромагнитное излучение осциллирующей поверхности незаряженных гидрометеоров сравнимо по интенсивности с излучением мелких капелек, но приходится на другие частоты.

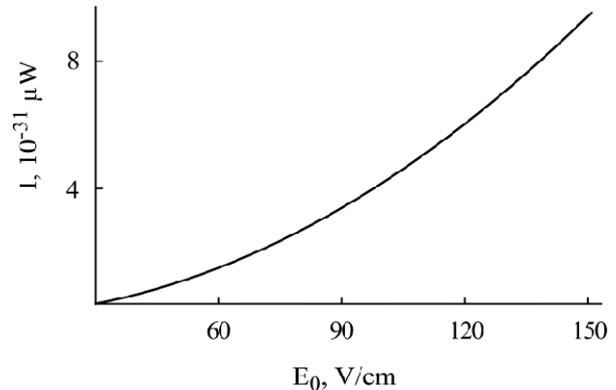


Рис. 3. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся в слабом электростатическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при $j = 20$, $\varepsilon = 0,1$, $h_{20} = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 100$ мкм.

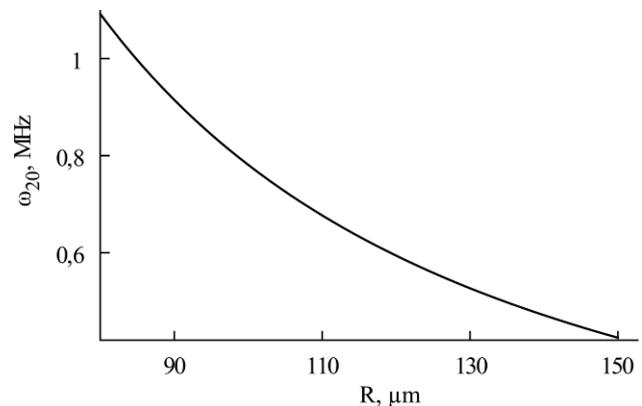


Рис. 4. Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся во внешнем слабом электростатическом поле, от радиуса капли, рассчитанная при таких же значениях физических величин, что и на рис. 3, и $E_0 = 50$ В/см ($\sim 1 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ для $R = 80$ мкм и $\sim 2 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ для $R = 150$ мкм).

При оценке интегрального излучения из облака следует учесть, что концентрация гидрометеоров с $R \approx 100$ мкм ниже на шесть порядков, чем концентрация мелких капелек с $R \approx 30$ мкм. В итоге по порядку величины интегральная интенсивность излучения облака определится именно мелкими каплями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Незаряженная капля проводящей жидкости, осциллирующая во внешнем электростатическом поле, является источником электромагнитного излучения. Построена асимптотическая математическая модель дипольного электромагнитного излучения капли. Оказалось, что интенсивность излучения от незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, практически не зависит от размера капли, чем отличается от излучения осциллирующей заряженной капли. Показано, что интегральная интенсивность электромагнитного излучения облака незаряженных капель во внешнем электростатическом поле связана со сфероидальными осцилляциями мелких капель. Излучение, генерируемое осцилляциями высоких мод крупных капель, оказывается существенно слабее.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский А.В., Дивинский Л.И. и др. *Активно-пассивная радиолокация грозových и грозоопасных очагов в облаках*. СПб: Гидрометеоздат. 1992. 286 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
3. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. *ДАН СССР*. 1982, **262**(6), 1344–1347.
4. Богатов Н.А. *Сборник докладов VI Международной конференции «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений»*. Россия, Петропавловск-Камчатский, 9–13 сентября 2013. ДВО РАН. С. 22–26.

5. Grigoryev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryaeva S.O. *Surf Eng Appl Electrochem*. 2015, **51**(6), 530–539.
6. Ширяева С.О. *ЖТФ*. 2002, **72**(4), 15–19.
7. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. *ЭОМ*. 2005, (4), 24–35.
8. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
9. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Том 2. М: Наука, 1970. 800 с.
10. Cheng K.J. *Phys Lett*. 1985, **A112**(11), 392–396.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 621 с.
12. Найфе А.Х. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
13. Мазин И.П., Шметер С.М. *Облака. Строение и физика образования*. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
14. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. *Облака и облачная атмосфера. Справочник*. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
15. Beard K.V., Токау А.А. *Geophys Res Lett*. 1991, **E1**(12), 2257–2260.
16. Beard K.V. *Rev Geophys*. 1987, **25**(3), 357–370.
17. Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю., Григорьев А.И., Артёмова Т.К. *ЖТФ*. 2015, **85**(4), 20–27.

Поступила 05.01.16

После доработки 04.02.16

Summary

The oscillations of an uncharged spheroidal drop of a conducting liquid in a uniform electrostatic field are considered. It is shown that the oscillations of the centers of inducing charges of different signs connected with the surface oscillation lead to the radiation of electromagnetic waves of the dipole type. A mathematical model of the electromagnetic radiation is constructed and an assessment of its intensity depending on the size of a drop and on the external field strength is carried out.

Keywords: uncharged drop, electrostatic field, oscillation, radiation of electromagnetic waves.