

Устойчивость капиллярных волн на заряженной поверхности слоя жидкости на электропроводном цилиндрическом твердом стержне

* С. О. Ширяева, Д. Е. Леснугина, А. И. Григорьев, Н. А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Аналитически в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций выводится дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности слоя жидкости на электропроводном цилиндрическом твердом стержне конечной толщины. Показано, что твердый стержень оказывает стабилизирующее влияние на капиллярные волны и снижает дестабилизирующее воздействие радиального электрического поля. Влияние стержня становится существенным лишь при значениях радиуса, сравнимых с радиусом струи. С ростом плотности поверхностного заряда расширяется диапазон неустойчивых волновых чисел, а значения инкрементов нарастания неустойчивости увеличиваются.

Ключевые слова: цилиндрическая струя, идеальная жидкость, поверхностная плотность заряда, слой жидкости, твердый стержень.

УДК 532.5

ВВЕДЕНИЕ

Потери энергии на высоковольтных линиях электропередач во время дождя многократно увеличиваются, достигая десятков процентов от передаваемой энергии. Эти потери могут быть связаны как с коронным разрядом с гребней капиллярных волн на поверхности жидкого слоя [1–2], так и с реализацией неустойчивости свободной поверхности жидкости [3–7]. Известно, что осесимметричная мода капиллярных волн на поверхности невозмущенной цилиндрической струи неустойчива уже в отсутствие заряда [3, 8]. Амплитуды таких волн неограниченно растут (с различной скоростью), и струя распадается на отдельные капли. Изгибная мода струи растет только при отличной от нуля плотности поверхностного заряда [3]. Конечно, в рассматриваемом случае, при наличии твердого стержня, говорить об изгибной неустойчивости можно только для бесконечно малых отклонений или имея в виду тенденцию.

В предлагаемой работе будет изучена устойчивость осесимметричных и изгибных капиллярных волн на поверхности слоя жидкости, покрывающей поддерживаемый при постоянном электрическом потенциале электропроводный твердый стержень, смачиваемый покрывающей его жидкостью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем решать задачу об устойчивости капиллярных волн на цилиндрической заряженной поверхности бесконечной струи с радиусом R идеальной несжимаемой идеально проводящей

жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внутри струи помещен стержень с радиусом r_0 . Задачу будем рассматривать в системе координат, движущейся с несущей скоростью струи. В такой системе координат поле скоростей будет связано только с волновыми движениями свободной поверхности струи. Воспользуемся цилиндрической системой координат, ось Z которой совпадает с осью струи. Предположим, что заряд на поверхности струи обусловлен тем, что стержень внутри струи поддерживается при постоянном электрическом потенциале Φ_0 . В итоге это обеспечивает наличие в окружающем струю пространстве радиального электрического поля $\vec{E}_0(\vec{r}) \equiv -\nabla\Phi_0 \equiv E_0(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r$ и появление заряда на свободной поверхности струи с плотностью $\chi_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi_0}{de_r}$, где \vec{e}_r – орт радиальной переменной в сферической системе координат.

Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды, запишем в виде:

$$F(\vec{r}, t) \equiv r - R - \xi(\varphi, z, t) = 0,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ – возмущение поверхности струи: $|\xi(z, \varphi, t)/R| \ll 1$, представляющее собой суперпозицию большого количества капиллярных волн бесконечно малой амплитуды. «Бесконечно малая амплитуда» понимается в смысле предела применимости модели «сплошной среды». Такое волновое движение порождается уже тепловым

движением молекул [9] и имеет амплитуду $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Для любых жидкостей от сжиженных газов до расплавленных металлов величина $\sqrt{\kappa T / \sigma}$, определяющая амплитуды таких волн, меньше ангстрема, поэтому для струй любых реальных радиусов соотношение $|\xi(z, \varphi, t) / R| \ll 1$ будет выполняться.

Решим поставленную задачу, полагая, что напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ выражается через его потенциал $\Phi(\vec{r}, t)$ известным соотношением $\vec{E}|\vec{r}, t| = -\nabla\Phi(\vec{r}, t)$, а поле скоростей волнового течения жидкости в струе $\vec{U}(\vec{r}, t)$ выражается через гидродинамический потенциал $\psi(\vec{r}, t)$, как $\vec{U}(\vec{r}, t) = \nabla\psi(\vec{r}, t)$.

Все расчеты будем проводить в безразмерных переменных, в которых $\rho = R = \sigma = 1$, сохраняя за всеми безразмерными величинами прежние обозначения.

Математическая постановка задачи имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}(\vec{r}, t)}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P(\vec{r}, t); \quad \Delta\psi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0; \\ r = r_0: \quad U_n &= (\vec{n}, \vec{U}) = U_r = 0; \\ r \rightarrow \infty: \quad \vec{E}(\vec{r}, t) &\rightarrow 0; \quad \nabla\Phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \\ r = R + \xi(z, \varphi, t): \quad \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} &= 0; \\ F(\vec{r}, t) &\equiv r - R - \xi(z, \varphi, t); \\ P - P_0 + P_E - P_\sigma &= 0; \quad \Phi = \Phi_S; \end{aligned} \quad (1)$$

где Φ_S – постоянный вдоль поверхности струи потенциал, а $P_\sigma = \text{div}\vec{n}$ – капиллярное и $P_E = \vec{E}^2(\vec{r}, t) / 8\pi$ – электрическое давления на поверхность жидкого слоя; \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности жидкого слоя.

Линеаризуем задачу (1) по малой амплитуде осцилляций, как это делалось в [3, 8, 9]. Введение потенциала скорости позволяет нам проинтегрировать линеаризованное уравнение Эйлера и получить выражение для гидродинамического давления:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 - \partial_t \psi(\vec{r}, t); \quad (2)$$

где P_0 – константа интегрирования; ∂_t означает производную по аргументу t .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ И ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Решение линеаризованной задачи определим в виде:

$$\begin{aligned} \xi(z, \varphi, t) &= \xi^{(1)}(z, \varphi, t) + O(\xi^{(2)}); \\ \psi(\vec{r}, t) &= \psi^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\psi^{(2)}); \\ P(\vec{r}, t) &= P^{(0)}(\vec{r}) + P^{(1)}(\vec{r}, t) + O(P^{(2)}); \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\Phi^{(2)}); \end{aligned} \quad (3)$$

где возмущение $\xi^{(1)}(z, \varphi, t)$, потенциалы $\psi^{(1)}(\vec{r}, t)$, $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$ и давление $P^{(1)}(\vec{r}, t)$ имеют в указанных безразмерных переменных один порядок малости; $\Phi^{(0)}(\vec{r})$ – значение потенциала в окрестности невозмущенной поверхности струи, а $\Phi^{(1)}(\vec{r}, t)$ – добавка, связанная с возмущением свободной поверхности.

В нулевом порядке малости получим равновесное состояние слоя жидкости на твердом стержне и электрический потенциал вокруг невозмущенной поверхности струи:

$$P_\sigma^{(0)} = 1; \quad P_E^{(0)} = 2\pi\chi_0^2; \quad \Phi^{(0)}(r) = \Phi_S - 4\pi\chi_0 \ln r. \quad (4)$$

В первом порядке малости искомые функции примут вид:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(z, \varphi, t) &= a(t) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \exp(ikz) + \text{к.с.}; \\ \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) &= A(t) \cdot K_m(kr) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \exp(ikz) + \text{к.с.}; \\ \psi^{(1)}(\vec{r}, t) &= B(t) \cdot \left(\frac{I_m(kr)}{I'_m(kr_0)} - \frac{K_m(kr)}{K'_m(kr_0)} \right) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \exp(ikz) + \text{к.с.}; \end{aligned} \quad (5)$$

где $I_m(z)$ и $K_m(z)$ – модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода порядка m [10]. Аббревиатура «к.с.» означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Здесь и далее штрих у функции означает производную по аргументу.

Легко показать [3], что в первом порядке малости единичный вектор нормали \vec{n} и давления $P_\sigma^{(1)}(\vec{r}, t)$, $P_E^{(1)}(\vec{r}, t)$ определяется выражениями:

$$r = 1: \quad \vec{n}(\vec{r}, t) \approx \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \approx \vec{e}_r - \partial_z \xi \cdot \vec{e}_z - \frac{1}{r} \partial_\varphi \xi \cdot \vec{e}_\varphi.$$

$$\begin{aligned} P_\sigma(\vec{r}, t) &\approx 1 - \xi(z, \varphi, t) - \partial_{\varphi\varphi} \xi(z, \varphi, t) - \partial_{zz} \xi(z, \varphi, t); \\ P_E(\vec{r}, t) &\approx \frac{1}{8\pi} \left((\nabla\Phi^{(0)})^2 + \xi(z, \varphi, t) \cdot \partial_r (\nabla\Phi^{(0)})^2 + 2(\nabla\Phi^{(0)})(\nabla\Phi^{(1)}) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Динамическое граничное условие в первом порядке малости принимает вид:

$$\begin{aligned} -\partial_t \psi(\vec{r}, t) - P_E^{(1)} + \xi(z, \varphi, t) + \\ + \partial_{\varphi\varphi} \xi(z, \varphi, t) + \partial_{zz} \xi(z, \varphi, t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (4)–(5) в (6), а результат в (7), получим эволюционное уравнение для амплитуды волн $a(t)$ в виде:

$$\frac{I_m(k)K'_m(kr_0) - K_m(k)I'_m(kr_0)}{kI'_m(k)K'_m(kr_0) - kK'_m(k)I'_m(kr_0)}\alpha''(t) + \left(-1 + m^2 + k^2 + 4\pi\chi^2 \left(1 + \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)}\right)\right)\alpha(t) = 0.$$

Принимая, что амплитуды волн зависят от времени по закону

$$\alpha(t) = a \exp(\pm i\omega t),$$

найдем дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^2 = \left(-1 + m^2 + k^2 + w \left(1 + \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)}\right)\right) \frac{kI'_m(k)K'_m(kr_0) - kK'_m(k)I'_m(kr_0)}{I_m(k)K'_m(kr_0) - K_m(k)I'_m(kr_0)},$$

$$w \equiv 4\pi\chi^2; \quad (8)$$

где ω – частота волн.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1а приведены зависимости квадрата частоты ω^2 для осесимметричной моды ($m = 0$) колебаний свободной поверхности струи от безразмерного волнового числа k при разных значениях радиуса стержня r_0 и полевого параметре $w = 0,4$. Из этого рисунка видно, что изменение r_0 не сказывается на ширине диапазона неустойчивых длин волн. Также видно, что при уменьшении толщины жидкого слоя частота его осцилляций уменьшается во всем диапазоне реализации волнового движения.

На рис. 1б приведены зависимости квадрата частоты осесимметричной моды от безразмерного волнового числа k при фиксированном радиусе r_0 и различных значениях полевого параметра w . Из рисунка видно, что увеличение полевого параметра расширяет область неустойчивости в сторону больших значений волновых чисел.

Расчеты показывают, что для изгибных волн ($m = 1$) вышеприведенные зависимости качественно аналогичны.

На рис. 2а изображены зависимости безразмерного инкремента осесимметричной моды ($m = 0$) от безразмерного волнового числа при фиксированном полевого параметре w и разных значениях радиуса стержня r_0 . Видно, что диапазон неустойчивых волн не зависит от радиуса стержня, а величина инкремента зависит от толщины жидкого слоя, уменьшаясь с его утоньшением.

На рис. 2б изображены зависимости инкремента нарастания неустойчивости осесимметричной моды от волнового числа k при фиксированном радиусе стержня и различных значениях полевого параметра w . Видно, что ширина диа-

пазона неустойчивых волн с ростом полевого параметра увеличивается.

На рис. 2в изображены зависимости инкремента нарастания неустойчивости нулевой (осесимметричной) моды от радиуса стержня r_0 при различных значениях полевого параметра w . Из рисунка следует, что наличие стержня является стабилизирующим фактором, так как увеличение его радиуса снижает значение инкремента неустойчивости. Полевой параметр играет роль дестабилизирующего фактора: его увеличение приводит к увеличению значения инкремента.

На рис. 2г представлена зависимость «длины не распавшейся части струи» от радиуса стержня r_0 при разных значениях полевого параметра w . Сам термин «длина не распавшейся части струи» введен в [8, см. с. 633]. В контексте данного исследования речь идет не о распаде струи на независимые капли, но о разбиении сплошной поверхности цилиндрической струи на отдельные капельки, нанизанные на сплошной стержень (как бусины). Но имея в виду физическую картину распада, оставим термин [8].

Распад струи определяется волной с наибольшим инкрементом нарастания неустойчивости γ_{\max} . За характерное время $\sim 1/\gamma_{\max}$ амплитуда неустойчивой волны увеличивается в e раз. Поэтому длину не распавшейся части струи можно оценить по порядку величины как $L \sim u_0/\gamma_{\max}$, где u_0 – несущая скорость струи (~ 1 м/сек). Из представленного графика видно, что увеличение полевого параметра приводит к уменьшению длины не распавшейся части струи.

На рис. 2д представлена зависимость волнового числа с максимальным инкрементом от радиуса стержня при разных значениях полевого параметра $m = 0$: тонкая линия: $w = 0$; штриховая линия: $w = 0,025$; толстая линия: $w = 0,05$, w – полевой параметр. Видно, что с ростом радиуса стержня и полевого параметра волновое число наиболее неустойчивой моды незначительно увеличивается.

На рис. 3а изображены зависимости инкремента нарастания неустойчивости изгибной моды ($m = 1$) от волнового числа k при фиксированном значении волнового параметра и различных значениях радиуса r_0 . Видно, что увеличение радиуса стержня уменьшает значение инкремента.

На рис. 3б изображены зависимости инкремента нарастания неустойчивости изгибной моды от волнового числа k при фиксированном радиусе r_0 и различных значениях полевого параметра w . Увеличение полевого параметра увеличивает значение инкремента.

На рис. 3в изображены зависимости максимального инкремента изгибной моды от радиуса

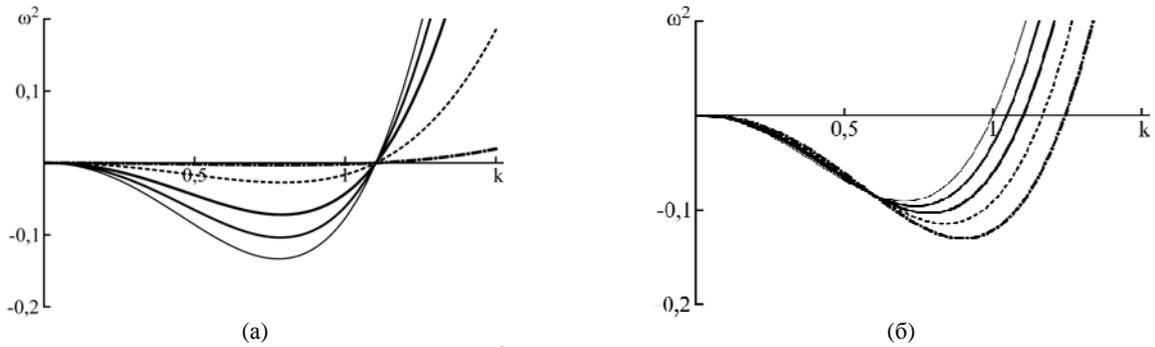


Рис. 1. Зависимость квадрата безразмерной частоты ω^2 для осесимметричной моды ($m = 0$) колебаний свободной поверхности струи от безразмерного волнового числа k при разных значениях радиуса стержня r_0 и полевого параметре $w = 0,4$. (Тонкая линия: $r_0 = 0$; линия средней толщины: $r_0 = 0,5$; толстая линия: $r_0 = 0,7$; штриховая линия: $r_0 = 0,9$; штрихпунктирная линия: $r_0 = 0,99$) – (а); зависимость квадрата частоты осесимметричной моды от безразмерного волнового числа k при фиксированном радиусе r_0 и различных значениях полевого параметра w . (Тонкая линия: $w = 0$; линия средней толщины: $w = 0,2$; толстая линия: $w = 0,4$; штриховая линия: $w = 0,6$; штрихпунктирная линия: $w = 0,8$) – (б).

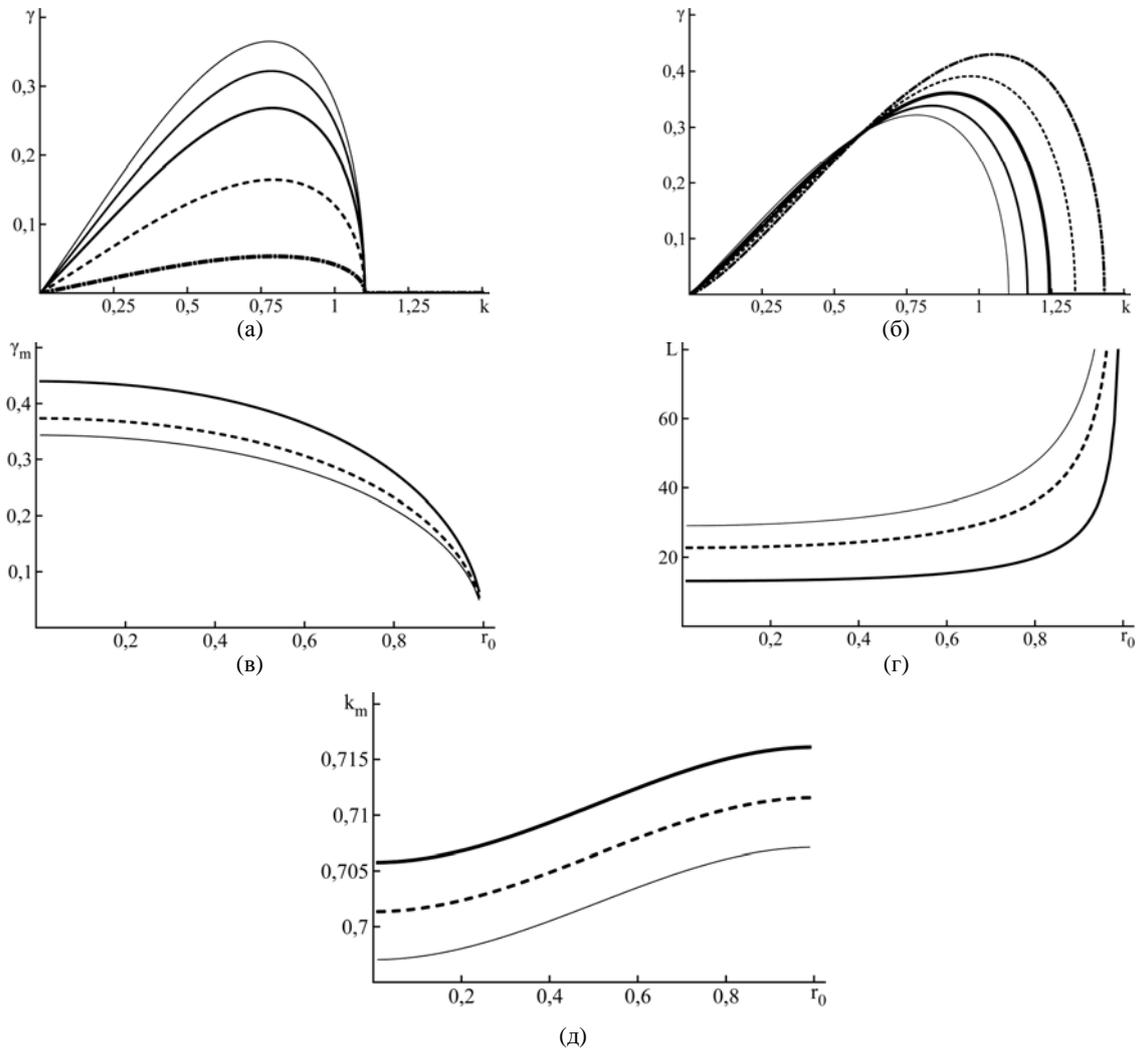


Рис. 2. Зависимость безразмерного инкремента осесимметричной моды ($m = 0$) от безразмерного волнового числа при фиксированном полевого параметре w и разных значениях радиуса стержня r_0 . (Тонкая линия: $r_0 = 0$; линия средней толщины: $r_0 = 0,5$; толстая линия: $r_0 = 0,7$; штриховая линия: $r_0 = 0,9$; штрихпунктирная линия: $r_0 = 0,99$) – (а); зависимость инкремента нарастания неустойчивости осесимметричной моды от волнового числа k при $r_0 = 0,5$ и различных значениях полевого параметра w . (Тонкая линия: $w = 0,4$; линия средней толщины: $w = 0,6$; толстая линия: $w = 0,8$; штриховая линия: $w = 1$; штрихпунктирная линия: $w = 1,2$) – (б); зависимость инкремента нарастания γ_m наиболее неустойчивой волны осесимметричной моды от радиуса стержня r_0 при различных значениях полевого параметра w . (Тонкая линия: $w = 0$; штриховая линия: $w = 0,5$; толстая линия: $w = 1$) – (в); зависимость длины не распавшейся части струи от радиуса стержня r_0 при разных значениях полевого параметра w . (Тонкая линия: $w = 0$; штриховая линия: $w = 0,5$; толстая линия: $w = 1$) – (г); зависимость волнового числа с максимальным инкрементом k_m для осесимметричной моды от радиуса стержня при разных значениях полевого параметра. (Тонкая линия: $w = 0$; штриховая линия: $w = 0,025$; толстая линия: $w = 0,05$) – (д).

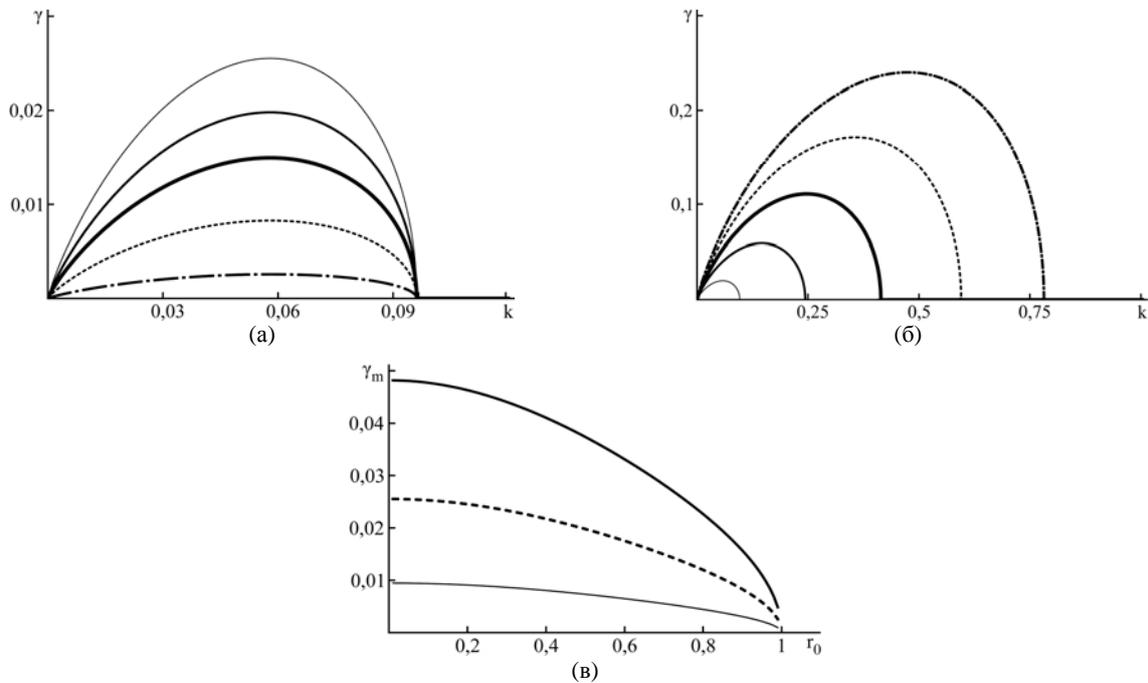


Рис. 3. Зависимость инкремента изгибной моды ($m = 1$) от волнового числа k при $w = 0,4$ и различных значениях радиуса r_0 . (Тонкая линия: $r_0 = 0$; линия средней толщины: $r_0 = 0,5$; толстая линия: $r_0 = 0,7$; штриховая линия: $r_0 = 0,9$; штрихпунктирная линия: $r_0 = 0,99$) – (а); зависимость инкремента изгибной моды от волнового числа k при $r_0 = 0,5$ и различных значениях полевого параметра. (Тонкая линия: $w = 0,4$; линия средней толщины: $w = 0,6$; толстая линия: $w = 0,8$; штриховая линия: $w = 1$; штрихпунктирная линия: $w = 1,2$) – (б); зависимость максимального инкремента изгибной моды от радиуса стержня при различных значениях полевого параметра. (Тонкая линия: $w = 0,3$; штриховая линия: $w = 0,4$; толстая линия: $w = 0,5$) – (в).

стержня r_0 при различных значениях полевого параметра w . Видно, что увеличение полевого параметра приводит к росту значения инкремента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В линейных по безразмерной амплитуде капиллярных волн расчетах показано, что изменение радиуса провода (твердого сердечника) не влияет на диапазон значений неустойчивых волновых чисел. Наличие твердого стержня оказывает стабилизирующее влияние на капиллярные волны: уменьшается инкремент неустойчивости для осесимметричных волн, то есть неустойчивость развивается медленнее. Частоты устойчивых осесимметричной и изгибной моды уменьшаются. Наличие радиального электрического поля является дестабилизирующим фактором. С ростом напряженности электрического поля расширяется диапазон неустойчивых волновых чисел, а значения инкрементов увеличиваются. Наличие стержня снижает дестабилизирующее влияние радиального электрического поля, но не компенсирует его полностью. Влияние твердого стержня становится заметным лишь при значениях его радиуса не меньше половины радиуса струи.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов А.В., Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2010, **80**(5), 80–87.
2. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. *ЭОМ*. 2010, **46**(2), 41–49.

3. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Спонтанный распад струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2012. 204 с.
4. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
5. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Electrostatics*. 1990, **25**, 165–184.
6. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
7. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir*. 2010, **26**, 15807–15813.
8. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М: Физматгиз, 1959. 699 с.
9. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
10. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.

Поступила 16.03.15
После доработки 28.07.15

Summary

Analytically, in a linear approach on the dimensionless amplitude of oscillation, the dispersion equation for capillary waves is obtained on the charged liquid layer surfaces on a conductive cylindrical firm bar of the final thickness. It is shown that the firm core has the stabilization effect on capillary waves and reduces the destabilizing influence of a radial electric field. The influence of a core becomes essential only at the values of the radius, comparable with a outer radius of the cover. The higher the density of a superficial charge, the wider the range of unstable wave numbers, and the higher the values of the instability increase increments.

Keywords: cylindrical jet, ideal liquid, surface density of charge, liquid layer, firm core.