

3. Кесслер И. Методы инфракрасной спектроскопии в химическом анализе. М., 1964.

4. Манько Т.А., Кваша А.Н. Отверждение полимеров в магнитном поле, 1994-Деп. В ОНИИТЭХИМ №410 XII-Д 94.

Поступила 21.04.03

Summary

By the method of infrared spectroscopy a noticeable change in the fine structure of absorption bands of epoxy compound EDT-10 samples hardened in magnetic field was found. A research by the method of infrared spectroscopy of samples UP-2217 also revealed an increase in intensity of cross-linking of macromolecules under thermosetting.

Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов, А.И. Григорьев

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду является давним и актуальным для многочисленных технических приложений предметом исследования [1, 2]. Несмотря на важность проблемы режимы распространения волн по поверхности заряженной жидкости при значении поверхностной плотности заряда меньше критического, выше которого реализуется неустойчивость Тонкса-Френкеля, до сих пор остаются слабо изученными и в первую очередь сказанное относится к нелинейным волнам. Исследованию волновых движений подобного рода и посвящена настоящая работа.

1. Пусть несжимаемая идеальная, идеально проводящая жидкость с плотностью ρ в декартовой системе координат $Oxuz$ с осью Oz , направленной вертикально вверх, заполняет полупространство $z \leq 0$. По ее поверхности распространяется бегущая волна неизменной формы, профиль которой в первом приближении по амплитуде волны синусоидален. Внешняя среда – вакуум. Жидкость считается идеальным проводником, несущим поверхностный заряд, такой, что электрическое поле над искаженной поверхностью в пределе $z \rightarrow \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0 \vec{e}_z$. Требуется определить профиль волны с точностью до величин второго порядка малости по ее амплитуде. Пусть горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей в жидкости не зависят от координаты y , а \vec{e}_x и \vec{e}_y – орты осей x и z . Тогда отклонение свободной поверхности $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной формы $z = 0$, потенциал поля скоростей внутри жидкости φ и электрический потенциал Φ над жидкостью удовлетворяют краевой задаче:

$$\begin{aligned} z < \xi: \quad \Delta\varphi = 0; \quad p = -\rho g z - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\varphi)^2; \quad z > \xi: \quad \Delta\Phi = 0; \\ z = \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad p + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}; \quad \Phi = 0; \\ z \rightarrow \infty: \quad -\nabla\Phi = E_0 z \vec{e}_z; \quad z \rightarrow -\infty: \quad -\nabla\varphi = \vec{0}. \end{aligned}$$

Начальные условия, необходимые для однозначной разрешимости этой задачи, сразу задавать не будем, а подберем их в соответствии с существующими методами анализа нелинейных волн [5–9] по ходу решения таким образом, чтобы результат решения имел как можно более простой вид.

2. Для решения задачи неизвестные величины представляются асимптотическими разложениями:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \Phi = -E_0 z + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_n \sim O(\varepsilon^n); \quad \Phi_n \sim O(\varepsilon^n); \quad \varphi_n \sim O(\varepsilon^n).$$

Как это принято в методе разных масштабов, изначально неизвестные величины считаются зависящими кроме координат еще и от основного $T_0 = t$ и более медленного $T_1 = \varepsilon t$ временных масштабов:

$$\xi = \xi(T_0, T_1, x); \quad \Phi = \Phi(T_0, T_1, x, z); \quad \varphi = \varphi(T_0, T_1, x, z).$$

Значения величин, входящих в граничные условия на свободной поверхности, с необходимой степенью точности выражаются через значения этих величин и пространственные производные от них при $z = 0$.

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial T_0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial T_0} + \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3);$$

$$(\nabla \Phi)^2 = (\nabla \Phi_1)^2 + O(\varepsilon^3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi = \left(\Phi_1 + \Phi_2 - E_0 \xi_1 - E_0 \xi_2 + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3);$$

$$(\nabla \Phi)^2 = \left(E_0^2 - 2E_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - 2E_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 - 2E_0 \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} + O(\varepsilon^3);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + O(\varepsilon^3).$$

3. После разделения с помощью выписанных асимптотических соотношений задачу на порядки малости и решения каждой из полученных задач стандартными методами теории возмущений несложно получить следующие выражения для ξ , φ , Φ в квадратичном приближении по амплитуде волны:

$$\xi = a \cos \theta + a^2 k \Lambda \cos 2\theta; \quad \Lambda = \frac{1}{4} \frac{(1 + a^2 k^2 - 2akW)}{0,5 - a^2 k^2}; \quad (1)$$

$$\varphi = -\frac{a\omega}{k} \sin \theta \exp(kz) - \frac{1}{4} a^2 \omega \frac{(3a^2 k^2 - 2akW \sqrt{\rho g \gamma})}{0,5 - a^2 k^2} \sin 2\theta \exp(2kz);$$

$$\Phi = aE_0 \cos \theta \exp(-kz) + \frac{1}{2} a^2 k E_0 + \frac{1}{4} a^2 k E_0 \frac{(2 - a^2 k^2 - 2akW)}{0,5 - a^2 k^2} \cos 2\theta \exp(-2kz);$$

$$\theta = \omega t - kx; \quad \omega^2 = kg(1 + a^2 k^2 - akW); \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \gamma}}.$$

Безразмерный параметр W характеризует устойчивость поверхности по отношению к избытку электрического заряда на свободной поверхности и известен под названием параметра Тонкса-Френкеля [2]. На плоскости безразмерных параметров (ak, W) имеется область значений этих параметров, расположенная под кривой L на рис. 1:

$$W - ak + \frac{1}{ak} = 0,$$

в которой решением задачи в линейном приближении является бегущая волна с гармоническим профилем. Если $W \leq 2$, таким решением является волна с любым значением волнового числа $k > 0$. При $W > 2$ имеется интервал волновых чисел, которому отвечают гармонические профили волн с экспоненциально растущей во времени амплитудой. Подобные движения в настоящей работе не рассматриваются.

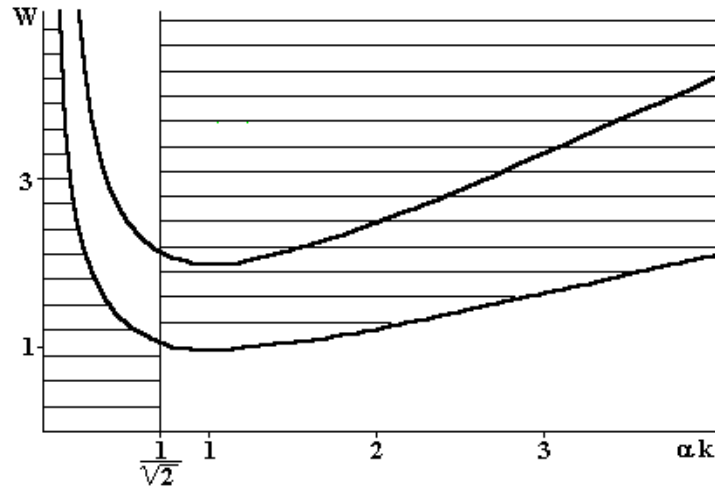


Рис.1. Области реализации различных режимов нелинейного волнового движения. Область над кривой L соответствует неустойчивым решениям. В заштрихованных областях, ограниченных кривой Γ и прямой $ak = 1/\sqrt{2}$, волны имеют заостренные вершины. В не заштрихованных областях волны имеют притупленные вершины.

Из выражения для ξ следует, что при $k = k_* = (a\sqrt{2})^{-1}$ знаменатели амплитуд величин второго порядка малости обращаются в ноль, а сами добавки ξ_2, φ_2, Φ_2 стремятся к бесконечности. Волновое число k_* называется резонансным [7]. При $k \rightarrow k_*$ амплитуда поправки второго порядка малости неограниченно возрастает. Неограниченность ее роста обусловлена несовершенством используемой модели идеальной жидкости. Если учитывать вязкость, то добавка второго порядка малости конечна при всех k [8]. В некоторых работах по моделированию движения поверхности идеальной жидкости волнам с волновыми числами k_* приписываются различные свойства, которые на самом деле не имеют физического смысла, потому что при таких значениях k модель, не учитывающая вязкость, недостоверна. Например, резонансное поведение волн, описанное в [7], и "мягкий режим неустойчивости" для волн с $ak = 1/\sqrt{2}$ из [9] – иллюзии, основанные на анализе решения в области несовершенства модели физического явления.

Анализ условий положительности и отрицательности безразмерного коэффициента Λ , определяющего амплитуду добавки второго порядка малости ξ_2 , показывает, что на плоскости безразмерных параметров (ak, W) кроме областей устойчивости и неустойчивости решений линейной задачи можно построить области, где $\Lambda > 0$ и где $\Lambda < 0$. Аналитически эти области описываются выражениями

$$\Lambda > 0 \quad \text{если} \quad \begin{cases} ak^2 < 0,5; \\ W < 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} ak^2 > 0,5; \\ W > 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases}$$

$$\Lambda < 0 \quad \text{если} \quad \begin{cases} ak^2 < 0,5; \\ W > 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} ak^2 > 0,5; \\ W < 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases}$$

На рис.1 области параметров, где $\Lambda > 0$ заштрихованы. Эти области лежат внутри криволинейных углов, образованных прямой $ak = 1/\sqrt{2}$ и линией Γ :

$$W - \frac{1}{2} \left(\alpha k + \frac{1}{\alpha k} \right) = 0.$$

Несложно убедиться в том, что при $\Lambda > 0$ профили волн имеют заостренные, а при $\Lambda < 0$ притупленные вершины.

4. Для воды ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72 \text{ дин/см}$) с помощью соотношений, приведенных в работе [8], несложно убедиться, что влияние вязкости $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ на профиль волны существенно на интервале $ak \in D = (0,65, 0,75)$. На концах этого интервала амплитуда добавки второго порядка малости, оцененная без учета вязкости воды, оказывается завышенной на несколько процентов своей величины, но при $ak \rightarrow 1/\sqrt{2}$ это завышение становится бесконечным. Вне указанного интервала модели вязкой и невязкой воды дают хорошо совпадающие результаты.

Развивая модель [8], можно показать, что в области устойчивости решений линейной задачи внешность интервала D есть множество точек, на котором моделирование волн на воде уравнениями идеальной жидкости остается хорошим приближением. Для примера, подтверждающего вывод о заостренности волновых профилей при одних значениях параметров и притупленности при других, на рис. 2 и 3 построены профили волн при $ak \notin D$ и $W < 2$.

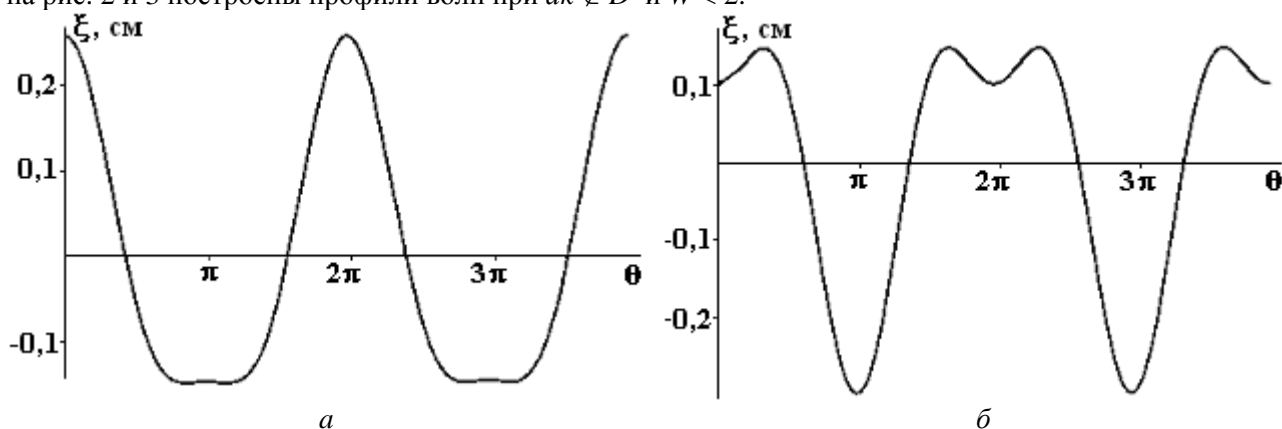


Рис.2. Профили нелинейных волн при малых значениях поверхностной плотности заряда, рассчитанные по (1) при $a = 0,2 \text{ см}$, $W = 0,5$; а) $ak = 0,5$; б) $ak = 0,9$

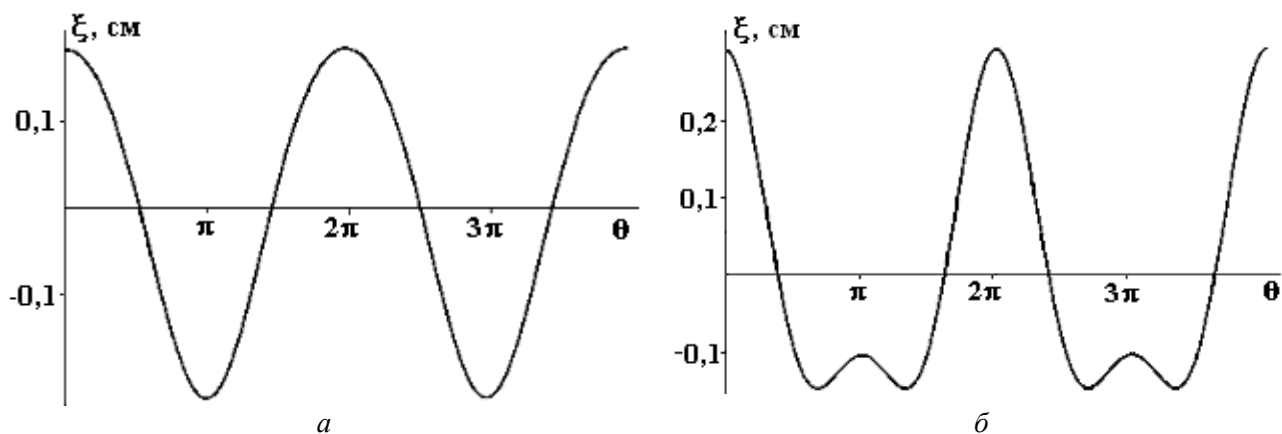


Рис.3. Профили нелинейных волн при значительных, но докритических значениях поверхностной плотности заряда, рассчитанные по (1) при $a = 0,2 \text{ см}$, $W = 1,5$; а) $ak = 0,5$; б) $ak = 0,9$

Из приведенных рисунков видно, что при значениях параметров (ak, W) из области под линией Γ длинные ($ak < 1/\sqrt{2}$) волны имеют заостренные вершины, а короткие ($ak > 1/\sqrt{2}$) – притупленные. Для значений параметров (ak, W) из области над Γ , наоборот, притуплены вершины длинных волн ($ak < 1/\sqrt{2}$), а заостряются вершины коротких ($ak > 1/\sqrt{2}$) волн.

5. На заряженной поверхности жидкости в зависимости от величины поверхностной плотности заряда выделяются два класса нелинейных периодических волновых движений. При малых значениях поверхностной плотности заряда волновое движение представляет собой гравитационно-капиллярную волну, которая имеет заостренную вершину в области длинных волн и притупленную вершину в области коротких волн. Увеличение поверхностной плотности заряда связано с появлением волн нового типа. В области длинных волн они имеют притупленную вершину, а в области коротких – заостренную.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tonks L.* Theory of liquid surface rapture by a uniform electric field // *Phys. Rev.* 1935. V. 48. P. 562–568.
2. *Фрекель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ.* 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
3. *Стокер Дж.* Волны на воде. М., 1959.
4. *Ле Меоте Б.* Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л., 1974.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика. Л., 1947.
7. *Nayfeh A.H.* Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves // *J. Fluid Mech.* Pt2. 1971. V. 48. P. 385–395.
8. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости // *Письма в ЖТФ.* 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
9. *Жакин А.И.* Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 3. С. 94–102.

Поступила 21.04.03

Summary

The profile of a nonlinear capillary-gravity wave on the charged ideal fluid surface has been billed with second approximation on wave amplitude. The conditions for the wave number and for the surface charge density have been obtained under which a short wave has a sharp crest and a long wave has a blunting one.

Ш.Б. Ибрагимов, М.К. Бахадирханов, Е.Г. Заугольникова

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВОЙНЫХ ВАНАДАТОВ РЗЭ

*Государственный технический университет им. Абу Райхана Бериуни,
ул. Университетская, 2, г. Ташкент, 700095, Узбекистан*

Физико-химические свойства соединений на основе двойных ванадатов РЗЭ типа $M_3Ln(VO_4)_2$ (где М-К, Rb; Ln-РЗЭ) в значительной степени определяются термодинамической стабильностью фаз, образующихся в процессе его получения. Поэтому в работе приводятся результаты определения высокотемпературной энтальпии, энтропии и теплоемкости данных соединений.

Теплоемкость измеряли методом смещения в массивном калориметре с изотермической оболочкой ($298,0 \pm 0,01$ К). Конструкция калориметра, используемая аппаратура и методика проведения опытов подробно описаны в [1, 2].

Экспериментальная температурная зависимость теплоемкости в области 298 – 673 К приведена на рисунке для соединения $Rb_3H_0(VO_4)_2$. На всех политемах $C_p(T)$ имеется область скачкообраз-