

О РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

1. Исследование электростатической неустойчивости заряженной жидкой капли представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзоры [1, 2] и указанную там литературу). При этом весьма часто в вышеупомянутых приложениях приходится иметь дело с осцилляциями капли (пузырька), взвешенной или движущейся в другой несмешивающейся с ней жидкости [3, 4]. Исследования подобных систем в линейном по амплитуде осцилляций приближении проводились в различных постановках неоднократно (см., например, [5–7]). Нелинейные же осцилляции капли в среде, несмотря на повышенный интерес последнего времени к нелинейным осцилляциям капель [8–10], пока не проведены.

2. Рассмотрим каплю радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, взвешенную в идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ_* , занимающей бесконечный объем. Коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела среда–капля примем равным σ , а полный заряд капли – Q . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одной из мод капиллярных осцилляций системы. Зададимся целью найти аналитическое выражение для формы образующей нелинейно осциллирующей капли в любой момент времени $t > 0$.

В сферической системе координат с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, имеет вид

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta, t) \equiv r - R[1 - \xi(\theta, t)], \quad |\xi|/R \gg 1.$$

Движения жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными, то есть примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле $\vec{V} = \nabla\psi(\vec{r}, t)$ и в среде $\vec{U} = \nabla\phi(\vec{r}, t)$ определяются функциями потенциалов скорости капли $\psi(\vec{r}, t)$ и среды $\phi(\vec{r}, t)$.

Система уравнений, описывающих эволюцию поверхности раздела, в изложенной формулировке будет состоять из системы уравнений Лапласа для потенциалов скоростей $\psi(\vec{r}, t)$ и $\phi(\vec{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$:

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta\psi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta\phi(\vec{r}, t) = 0;$$

и граничных условий:
в центре капли

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0 \quad ; \quad \phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0 \quad ;$$

на границе раздела сред: кинематического

$$r = 1 + \xi; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta};$$

равенства нормальных компонент скоростей движения жидкости в капле и в среде

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta};$$

динамического

$$-\rho_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\rho_1}{2} (\nabla \psi)^2 + P_{in} + P_E - P_\sigma = -\rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho_2}{2} (\nabla \varphi)^2 + P_{ex};$$

$$P_E = \frac{\varepsilon_* (\nabla \Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n};$$

постоянства электрического потенциала поверхности капли

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_S(t).$$

В выписанных математических соотношениях P_{in} и P_{ex} соответственно давления в капле и среде; P_E – давление электрического поля на границу раздела сред; P_σ – лапласовское давление, \vec{n} – единичный вектор положительной нормали к поверхности капли; $\Phi_S(t)$ – постоянный вдоль поверхности капли электростатический потенциал.

Кроме вышеперечисленных граничных условий следует учесть также условия: неизменности электрического заряда

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) dS = Q; \quad S = \begin{cases} r = R [1 + \xi(\theta, t)]; \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неизменности объема капли

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad V_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R [1 + \xi(\theta, t)]; \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (1)$$

неподвижности центра масс капли

$$\frac{\rho_1 \int_{V_1} \vec{r} dV_1 + \rho_2 \int_{V_2} \vec{r} dV_2}{\rho_1 \int_{V_1} dV_1 + \rho_2 \int_{V_2} dV_2} = 0; \quad V_2 = \begin{cases} R [1 + \xi(\theta, t)] \leq r \leq \infty; \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

Начальные условия к поставленной задаче формулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$\xi(\theta, t = 0) = \xi_0 P_0(\cos \theta) + \xi_1 P_1(\cos \theta) + \varepsilon P_k(\cos \theta); \quad (k \geq 2);$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t = 0)}{\partial t} = 0.$$

Здесь ε – амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\cos \theta)$ – полином Лежандра k -го порядка; ξ_0 и ξ_1 – константы, определяемые условиями (1) и (2), соответственно с точностью до второго порядка малости.

Следует отметить, что условия (1) и (2) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный. Несложно показать, что если в начальный момент времени возбуждена только одна мода, то условия (1) и (2) выполняются автоматически, а выражения для констант ξ_0 и ξ_1 имеют вид

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = 0.$$

3. Чтобы упростить решение задачи будем использовать безразмерные переменные, в которых $R = \sigma = \rho_l = l$.

При решении поставленной задачи в квадратичном по амплитуде осцилляций приближении воспользуемся известным методом многих масштабов [11]. Для этого искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t)$, $\Phi(\vec{r}, t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε подобно тому, как это было сделано в [10] и будем считать их зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов T_m , определенных через $T_m = \varepsilon t^m$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \xi^m(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot M_n^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \psi^m(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot D_n^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots); \\ j(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \varphi^m(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot G_n^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \Phi^m(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot F_n^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots). \end{aligned}$$

Сформулированная задача отличается от задачи о расчете нелинейных колебаний заряженной капли электропроводной жидкости в вакууме, подробно разобранный в [10], только учетом внешней несжимаемой идеальной диэлектрической среды, что приводит к появлению в математической формулировке задачи еще одного уравнения Лапласа для потенциала поля скоростей среды, соответствующего ему граничного условия для потенциала скорости на бесконечности, дополнительному условию равенства нормальных компонент скоростей среды и капли на границе раздела сред, а также некоторому изменению динамического условия на границе раздела сред. В этой связи опустим описание математической процедуры решения задачи, подобной использованной в [10], а сразу выпишем выражение для образующей формы заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, нелинейно осциллирующей в идеальной несжимаемой диэлектрической среде:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) \approx \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\cos\theta) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} [1 + \cos(2\omega_k t)] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^k \left[(\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cos(\omega_{2j} t) - (\lambda_{k,k,2j}^{(-)} - \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cos(2\omega_k t) \right] P_{2j}(\cos\theta) \right\} + O(\varepsilon^3 t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\omega_n^2 = \chi_n n(n-1)[(n+2) - W]; \quad \chi_n = \left(1 + \frac{n\rho}{n+1} \right)^{-1}; \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_*}$$

$$\lambda_{m\ln}^{(\pm)} = \frac{[\gamma_{m\ln} \pm \omega_n \omega_l \eta_{m\ln}]}{[\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2]}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2};$$

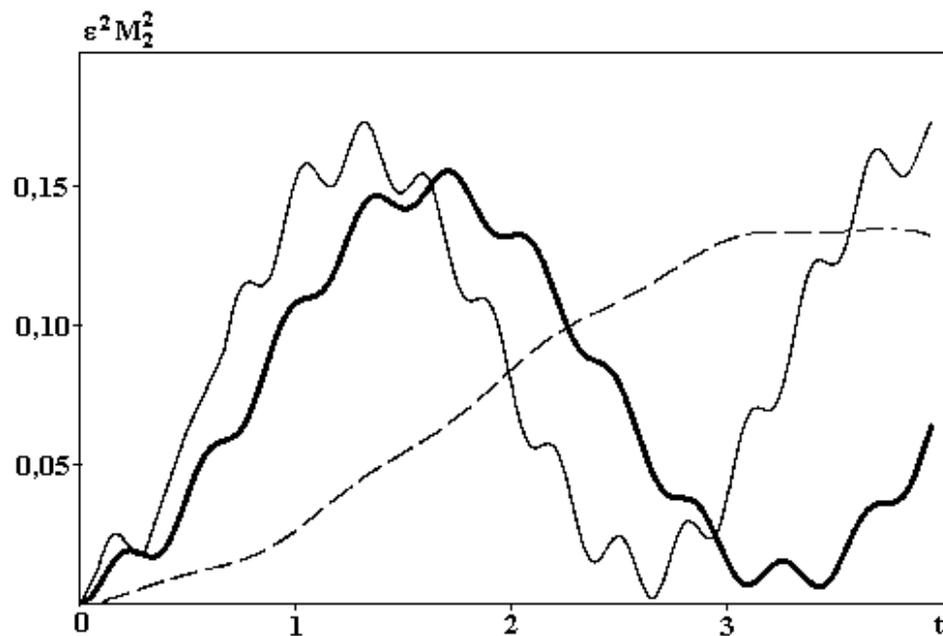
$$\begin{aligned} \gamma_{m\ln} \equiv \chi_n K_{m\ln} \left\{ \omega_m^2 \left[n - m + 1 - \frac{\rho n(n-m-1)}{n+1} \right] + 2n[l(l+1) - 1] + \right. \\ \left. + W \frac{n}{2} [l(m+1) - m(2m - 2n + 7) + 3] \right\} + \chi_n \alpha_{m\ln} \left\{ \omega_m^2 \left[\frac{1}{m} - \frac{n\rho}{(n+1)(m+1)} \right] + W \frac{n}{2} \right\}; \end{aligned}$$

$$\eta_{m\ln} \equiv \chi_n K_{m\ln} \left\{ \frac{n}{2} - m + 1 + \frac{\rho n(2m+3-n)}{2(n+1)} \right\} + \chi_n \alpha_{m\ln} \left\{ \frac{2l+n}{2ml} - \frac{\rho n(n+2l+3)}{2(m+1)(l+1)(n+1)} \right\};$$

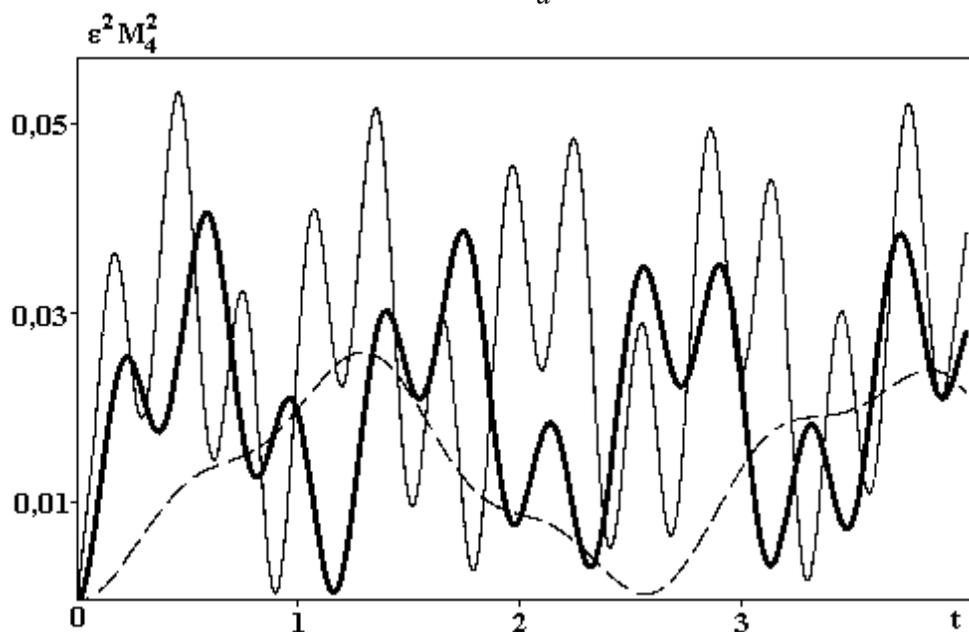
$$K_{m\ln} \equiv [C_{m\ln}^{000}]^2; \quad \alpha_{m\ln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m\ln}^{000} C_{m\ln}^{-110};$$

Здесь $C_{m\ln}^{000}$ и $C_{m\ln}^{-110}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [10, 12].

Из (3) видно, что начальное возмущение любой k -й (четной либо нечетной) одиночной моды капиллярных колебаний приводит к возбуждению во втором порядке малости только четных мод с номерами, лежащими в диапазоне $[0 - 2k]$.



a



б

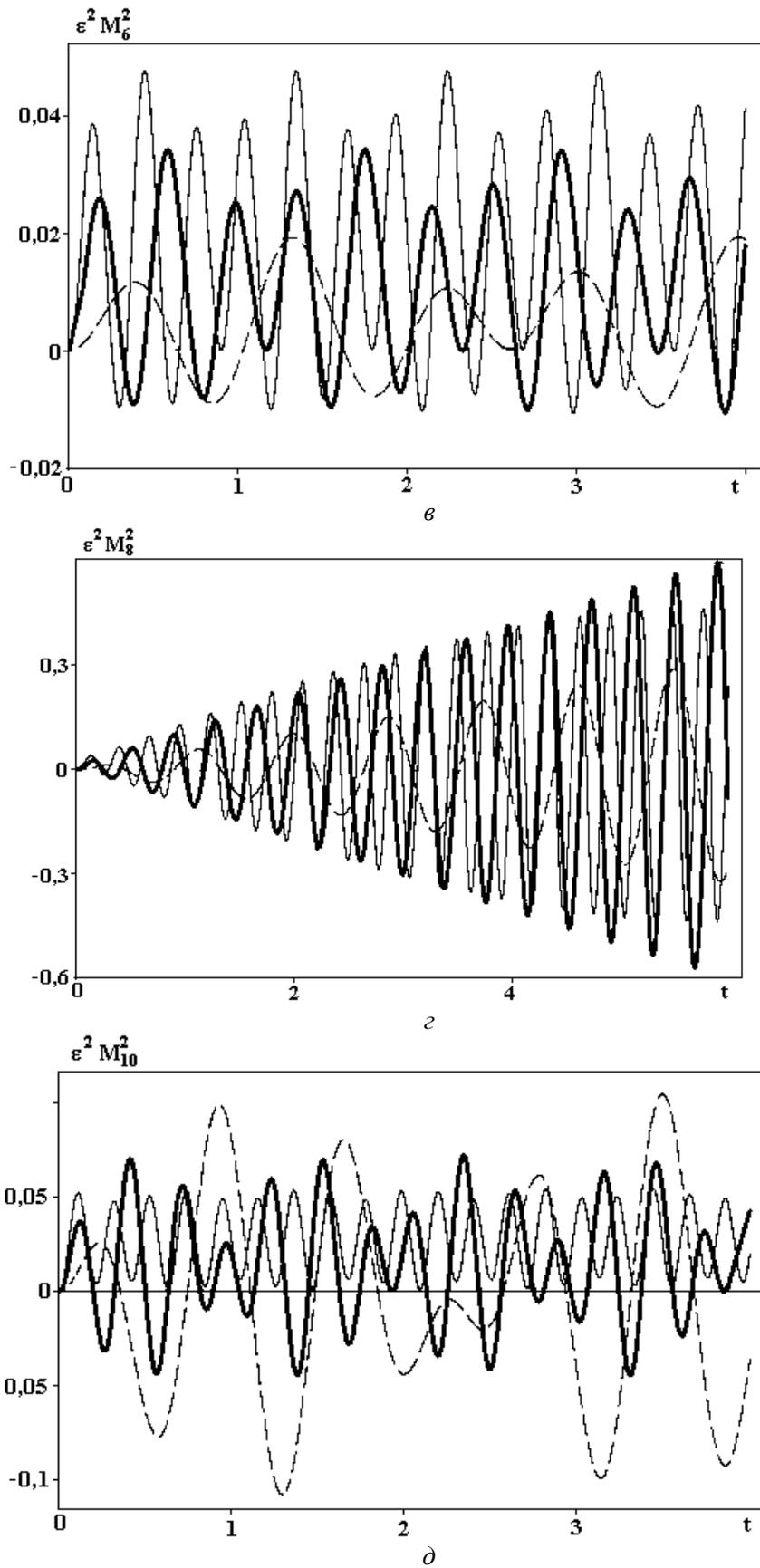


Рис. 1. Зависимости безразмерных амплитуд мод $M_n^{(2)}(t)$, возбуждающихся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся пятой модой, при $W=1$. Пунктирная линия соответствует $\rho = 0,1$; тонкая сплошная линия $\rho = 1$; сплошная линия $\rho = 10$:

а – вторая мода, $n = 2$; б – четвертая мода, $n = 4$; в – шестая мода, $n = 6$; г – восьмая мода, $n = 8$; д – десятая мода $n = 10$

4. На рис. 1,а – рис. 1,д приведены рассчитанные по (3) при различных значениях отношения плотностей среды и капли временные зависимости амплитуд некоторых из мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением пятой ($k = 5$) моды. Из рис. 1 видно, что с увеличением отношения плотностей ρ растет амплитуда восьмой моды, а амплитуды всех остальных мод, кроме нулевой (которая остается неизменной), убывают. То, что амплитуда нулевой моды капли при изменении ρ остается постоянной связано с тем, что во втором порядке малости нулевая мода в нелинейном взаимодействии не участвует. Зависимость амплитуды нулевой моды от ρ появится лишь при расчетах третьего порядка малости.

Расчеты по (3), проиллюстрированные рис. 1, выполнены при значении параметра Рэлея $W=1$, то есть при W далеко от критического значения $W_{cr} = 4$ (при котором становится неустойчивой основная (вторая) мода), так и от резонансных значений W_r ($W_r \approx 0,118$ при $\rho = 0,1$; $W_r \approx 0,641$ при $\rho = 1$; $W_r \approx 1,159$ при $\rho = 10$), при которых реализуется вырожденное трехмодовое взаимодействие пятой и восьмой мод. Тем не менее, из рис. 1,з видно, что в рассмотренной при расчетах ситуации резонанс пятой и восьмой мод имеет место: амплитуда восьмой моды существенно (в несколько раз) превышает амплитуды всех мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, хотя, казалось бы, при $W = 1$ (при $W \neq W_r$) резонансная перекачка энергии из пятой моды в восьмую не должна реализовываться. Причем согласно рис. 1,з при $\rho = 10$ имеет место резонансная раскачка восьмой моды с линейным ростом амплитуды осцилляций. Для остальных значений ρ из использованных в расчетах также наблюдается резонансная раскачка с безразмерными периодами колебаний $T \approx 11$ для $\rho = 0,1$ и $T \approx 9$ для $\rho = 1$.

Отметим, что возможные в рассматриваемой системе резонансные ситуации связаны с появлением в выражении (3) малых знаменателей: когда при определенных соотношениях между частотами нелинейно взаимодействующих мод (при $\omega_n^2 = (\omega_m \pm \omega_l)^2$) один из знаменателей в коэффициентах $\lambda_{m\ln}^{(\pm)}$, через которые выражаются амплитуды поправок второго порядка малости, обращается в ноль. Стандартная процедура устранения подобной ситуации связана с введением малого отклонения частоты одной из мод от резонансной с последующим разложением по степеням такого малого отклонения и исключением секулярных членов [13]. Условие проявления вырожденного резонанса между пятой и восьмой модами имеет вид: $\omega_8^2 = 4\omega_5^2$ и реализуется при $\rho=10$, когда $W_r \approx W_r \approx 1,159$. Если $W=1$, то при $\rho = 10$ несложно найти по (13) $\omega_8^2 \approx 50,97$, $\omega_5^2 \approx 12,86$, $\omega_8^2 - 4\omega_5^2 \approx -0,462$, что более чем в сто раз меньше ω_8^2 . Следовательно, отношение разности $\omega_8^2 - 4\omega_5^2$ к ω_8^2 может служить малым параметром, а отклонение $\omega_8^2 - 4\omega_5^2$ от нуля может считаться малым. Иными словами, при $W=1$ соотношение частот восьмой и пятой моды достаточно близко к резонансному, чтобы в расчетах проявилась резонансная раскачка восьмой моды за счет отбора энергии у изначально возбужденной пятой. Указанное обстоятельство интересно тем, что резонанс наблюдается при достаточно большом отклонении параметра W от W_r , и позволяет предположить, что наличие значительного заряда на капле совсем не обязательно для получения резонансной раскачки одной из мод.

Учтем, что согласно [13] количество резонансных ситуаций, в которых в резонансное взаимодействие наряду с высокими модами включены и низкие, весьма велико (измеряется сотнями при $n, m, l \leq 100$). Принимая во внимание обнаруженную слабую зависимость условий реализации нелинейного резонансного обмена энергией между модами от величины собственного заряда капли (параметра W), можно ожидать, что в естественных условиях, например, в грозном облаке, в свободно падающих каплях будут реализовываться все резонансные ситуации, допустимые при заданном наборе начально возбужденных мод, даже если заряд капли далек от резонансного. Это обстоятельство представляется важным в связи с необходимостью моделирования до сих пор непонятного механизма зарождения разряда молнии в грозном облаке, который согласно существующим представлениям может начаться с коронного разряда в окрестности крупной свободно падающей градины. Поскольку электрические заряды, обнаруживаемые при натурных измерениях на облачных каплях, не превышают одной трети от критического по Рэлею, а внутриоблачные электрические поля много меньше необходимых для начала коронного разряда, то наиболее вероятной причиной начала коронного разряда в окрестности обводненной градины или капли является неустойчивость ее заряженной поверхности, сопровождающаяся эмиссией большого

количества высокодисперсных сильно заряженных капелек, у поверхности которых уже может зажечься коронный разряд [1, 2].

Резонансная раскачка амплитуды осцилляций основной ($n = 2$) моды, что соответствующая вытягиванию капли в фигуру, близкую к вытянутому сфероиду, слабо заряженной (в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду) облачной капли, может привести к реализации неустойчивости ее поверхности в окрестности вершин сфероида вследствие увеличения там поверхностной плотности собственного и поляризационного заряда за счет его перераспределения по поверхности капли при ее удлинении [1, 2]. Проблема заключается в том, что в расчетах второго порядка малости для нелинейно осциллирующей в вакууме капли идеальной жидкости строгий резонанс, в котором бы участвовала основная мода, отсутствует. Такие резонансы появляются, если учесть реальную вязкость жидкости, однако такой учет пока можно провести лишь на качественном уровне, поскольку задача о нелинейных осцилляциях капли вязкой жидкости еще не решена ввиду ее сложности.

Как отмечалось выше, резонансные ситуации характеризуются соотношениями между частотами взаимодействующих мод капиллярных осцилляций типа $\omega_n^2 = (\omega_m \pm \omega_l)^2$. Согласно (3) в анализируемой задаче исследования осцилляций заряженной капли во внешней среде величина частоты ω_j кроме номера моды j определяется безразмерным параметром W и безразмерной плотностью ρ . Сказанное означает, что положение резонансов в пространстве номеров мод будет зависеть от величин параметров W и ρ , тогда как для осцилляций капли в вакууме оно зависело только от W . Несложные расчеты показывают, что появление еще одной степени свободы, связанной с изменением ρ , приводит к существенному увеличению количества резонансных ситуаций и изменению положений (в смысле изменения величины W), ранее известных для капли в вакууме (при $\rho = 0$). Общее количество резонансов при $m, l \leq 100$ и $W < 4$ измеряется тысячами, а потому перечислять их не имеет смысла.

Результаты расчетов по (3), приведенные на рис. 1, получены для трех различных значений отношения плотностей среды и капли ρ : $\rho = 0,1$, $\rho = 1$, $\rho = 10$. Такие значения выбраны для иллюстрационных расчетов из тех соображений, что при $\rho < 0,1$ и $\rho > 10$ изменения ρ весьма мало сказываются на величине частот капиллярных осцилляций рассматриваемой системы. Малые значения в пределе $\rho \rightarrow 0$ соответствуют ситуации осцилляций капли жидкости в газовой среде, большие значения ρ в $\rho \rightarrow \infty$ пределе соответствуют осцилляциям газового пузыря в жидкой среде.

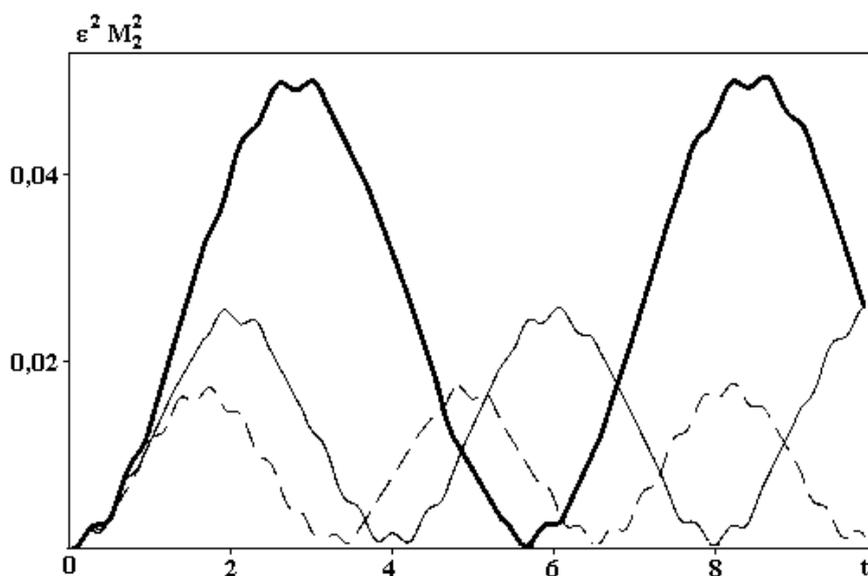


Рис. 2. Зависимости безразмерной амплитуды основной моды $M_2^{(2)}(t)$, возбуждающейся во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся пятой модой, при $\rho = 1$. Пунктирная линия соответствует $W=1$; тонкая сплошная линия — $W=2$; сплошная линия — $W=3$

На рис. 2 приведены результаты расчетов амплитуды основной моды, возбуждающейся во втором порядке малости при фиксированном ρ и различных докритических значениях параметра W , в котором собраны важные для обсуждаемого феномена физические величины: коэффициент межфазного натяжения, диэлектрическая проницаемость среды, заряд капли и ее радиус. В размерной

форме параметр W имеет вид: $W = Q^2/4\pi\sigma R^3\epsilon_*$. Отметим, что величина коэффициента межфазного натяжения σ связана с коэффициентами поверхностного натяжения чистых фаз σ_1 и σ_2 известным правилом Антонова $\sigma \approx |\sigma_1 - \sigma_2|$, где σ_1 и σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения фаз, контактирующих с общим газом. Как правило, величина σ существенно меньше коэффициентов поверхностного натяжения чистых фаз, что позволяет в некоторых случаях наблюдать неустойчивость границы раздела по отношению к собственному заряду. Из рис. 2 видно, что с увеличением W (с приближением к критическому для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значению $W_{cr} = 4$) амплитуда основной моды заметно растет.

5. Заключение. При нелинейных осцилляциях капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в диэлектрической идеальной несжимаемой среде с ростом отношения плотностей среды и капли максимум энергии в спектре нелинейно возбужденных мод смещается к наиболее высокой моде независимо от того какой из мод задается начальная деформация капли. Учет наличия внешней среды проявляется как в изменении при варьировании отношения плотностей среды и капли количества резонансных ситуаций, так и в изменении величины собственного заряда капли, при котором реализуется резонанс. Выяснилось, что нелинейные осцилляции могут иметь резонансный вид даже при зарядах капли, далеких от соответствующих точным положениям резонансных ситуаций, что объясняется относительно слабым влиянием собственного заряда капель (при докритических по Рэлею для основной моды его значениях) на частоты высоких мод осцилляций. Именно это обстоятельство обеспечивает получающиеся в расчетах высокие значения амплитуды нелинейно возбуждающейся основной моды капли при задании начальной деформации модами, более высокими чем основная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
2. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
3. Жаров А.Н., Ширяева С.О. Заряженные пузырьки в жидкости (обзор) // Электронная обработка материалов. 1999. № 6. С. 9–21.
4. Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О. Электростатическое монодиспергирование жидкостей как метод получения двухфазных систем (обзор) // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А. Капиллярные колебания и устойчивость заряженной вязкой капли в вязкой диэлектрической среде ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып.9. С. 1–8.
6. Жаров А.Н., Коромыслов В.А., Григорьев А.И. О рэлеевском распаде сильно заряженного пузыря в диэлектрической жидкости // Электронная обработка материалов. 1998. № 1–2. С. 43–47.
7. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Рыбакова М.В., Ширяева С.О. О равновесной форме заряженной капли, движущейся относительно среды в электростатическом поле // Электронная обработка материалов. 2002. № 1. С. 41–45.
8. Tsamopoulos J. A., Brown R. A. Resonant oscillations of inviscid charged drops // J. Fluid Mech. 1984. V.147. P. 373–395.
9. Feng Z.C. Instability caused by the coupling between nonresonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
10. Ширяева С.О. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Голованов А.С. Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли // Электронная обработка материалов. 2001. № 2. С. 26–35.
11. Найфе А. Методы возмущений. М., 1976.
12. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л., 1975.
13. Ширяева С.О. О внутреннем резонансе мод нелинейно-осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.

Поступила 03.03.03

Summary

The analytical expression with resonance terms for the shape of nonlinear oscillations of the charged ideal drop inside dielectric ideal liquid has been received. It has been shown that nonlinear oscillation can have a resonant kind even if drop charges have values quite far from the accuracy resonance one. This fact is explained by rather weak influence of a proper drop charge of on high modes oscillation frequencies.