

К расчету напряженности электростатического поля осциллирующей незаряженной капли

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Найдено аналитическое выражение для напряженности электрического поля осциллирующей незаряженной капли невязкой электропроводной жидкости, помещенной в электростатическое поле в линейном по амплитуде возмущения приближении. Проведены оценки величины напряженности поля в волновом приближении (на больших расстояниях от капли) и в квазистационарном приближении (у поверхности капли).

Ключевые слова: сфероидальная капля, однородное электростатическое поле, осцилляции, волновое и квазистационарное приближения.

УДК 532.62: 541.24

ВВЕДЕНИЕ

Незаряженная сферическая капля радиуса R с коэффициентом поверхностного натяжения σ , помещенная в электростатическое поле напряженностью \vec{E}_0 , поляризуется в нем и с точки зрения электродинамики превращается в электрический диполь, вокруг которого возникает собственное электростатическое поле дипольного типа. Равновесная форма капли при этом меняется со сферической на близкую к сфероидальной [1–3]. Во всяком случае в линейном по квадрату эксцентриситета приближении она может считаться таковой, причем эксцентриситет определяется выражением [1]:

$$e \equiv \frac{3E_0}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{R}{\sigma}}.$$

В жидкости всегда существует капиллярное волновое движение, поэтому имеет место искажение равновесной поверхности раздела весьма малой (тепловой) амплитуды с характерной высотой гребней $\xi \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [4]. Эти волны порождаются тепловым движением молекул жидкости. Волновое искажение поверхности капли сказывается и на создаваемом электрическом поле капли, воздействуя на дипольную структуру поля и приводя к появлению зависимости напряженности поля от времени.

Расчет напряженности электрического поля такой капли представляет интерес в связи с исследованиями ее устойчивости во внешнем электростатическом поле [5–7] и ее нелинейных осцилляций [8]. Эта проблема вызывает интерес и при исследовании возможности зажигания коронного разряда в окрестности поляризованной капли [9] при напряженностях полного поля,

далеких от предельных (в смысле реализации неустойчивости по отношению к поляризационному заряду). Она и является предметом исследования данной работы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть незаряженная сферическая капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости плотностью ρ_1 находится в идеальной несжимаемой среде с проницаемостью ε_{ex} и плотностью ρ_2 в однородном электростатическом поле, в котором она принимает вытянутую (вдоль вектора напряженности) сфероидальную форму. Требуется определить напряженность электрического поля индуцированного в капле заряда.

Будем решать задачу в сферической системе координат с началом в центре масс капли. Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли можно записать в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t),$$

где $r(\theta)$ – равновесная форма капли, которую согласно сказанному выше будем считать сфероидальной; $\xi(\theta, t)$ – капиллярное волновое возмущение поверхности капли: $\max |\xi| \ll \min r(\theta)$.

Ограничимся рассмотрением осесимметричных осцилляций, что существенно упростит выкладки.

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{d\vec{V}_j(\vec{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \vec{\nabla} P_j(\vec{r}, t); \quad \text{div} \vec{V}_j(\vec{r}, t) = 0; \quad j = 1; 2;$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}; \quad \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \vec{V}_1(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned}
r \rightarrow \infty: \vec{V}_2(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}_0 \equiv E_0 \vec{e}_z; \\
r = r(\theta) + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V}, \vec{\nabla})F = 0; \\
F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t); \\
P_1 - P_2 + P_E - P_\sigma = 0; \quad (\vec{\tau}, \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\vec{V}_j(\vec{r}, t)$ – скорость движения жидкости в капле ($j = 1$) и среде ($j = 2$). Аналогично $P_j(\vec{r}, t)$ – гидродинамическое давление в капле ($j = 1$) и среде ($j = 2$); $\vec{E}(\vec{r}, t)$ – напряженность электрического поля; $\vec{\tau}$ – орт касательной к возмущенной поверхности капли; $P_E = \varepsilon_{ex} \vec{E}^2 / 8\pi$ – давление электрического поля; $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ – капиллярное давление. Орт нормали к поверхности капли \vec{n} определяется выражением:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|} \Big|_{F=0}.$$

Для замыкания выписанной системы уравнений введем условия неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс, а также незаряженности капли соответственно:

$$\begin{aligned}
\int_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} dV = 0; \\
V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_S (\vec{n}, \vec{E}) dS = 0, \\
S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].
\end{aligned}$$

Решения этой задачи будем искать, полагая эксцентриситет капли малым, в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned}
\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \\
\alpha_n(t) = \alpha_n \exp(-i\omega_n t),
\end{aligned}$$

где ω_n – частота капиллярных колебаний поверхности, в общем случае комплексная; α_n – амплитуда, $P_n(\mu)$ – полином Лежандра, $\mu \equiv \cos \theta$.

Нижеследующие расчеты будем проводить с точностью до произведения двух малых параметров, включая задачи: квадрата эксцентриситета и малого возмущения ($e^2 \cdot \xi$).

НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ У ПОВЕРХНОСТИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

Поле вне капли удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0. \end{cases}$$

Представим напряженность электрического поля в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)}, \quad (1)$$

где $\vec{E}^{(0)}$ – напряженности поля нулевого порядка малости по e^2 и ξ ; $\vec{E}^{(1)}$ – добавка к напряженности первого порядка по e^2 и ξ .

Для отыскания напряженности поля в первом приближении $\vec{E}^{(1)}$ следует решить систему уравнений неразрывности электрического поля и волнового:

$$\operatorname{div} \vec{E}^{(1)} = 0; \quad \Delta \vec{E}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^{(1)}}{\partial t^2}; \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
r \rightarrow \infty: \quad \vec{E}^{(1)} \rightarrow 0, \\
r = r(\theta): \quad (\vec{\tau}, \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)) = 0; \quad \oint_S (\vec{n}, \vec{E}^{(1)}) dS = 0.
\end{aligned}$$

Представим вектор $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$ в виде разложения на три ортогональных вектора [10]:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{N}_1 \Phi_1(\vec{r}, t) + \vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) + \vec{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t), \quad (3)$$

где $\Phi_j(\vec{r}, t)$ – неизвестные скалярные функции, а векторные операторы-проекторы \vec{N}_j имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1 \equiv \vec{\nabla}, \quad \vec{N}_2 \equiv \vec{\nabla} \times \vec{r}, \quad \vec{N}_3 \equiv \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r}), \\
\vec{N}_1^+ \equiv -\vec{\nabla}, \quad \vec{N}_2^+ \equiv \vec{r} \times \vec{\nabla}, \quad \vec{N}_3^+ \equiv (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \times \vec{\nabla}
\end{aligned}$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\vec{N}_j^+ \cdot \vec{N}_m = 0, \quad \text{при } m \neq j,$$

где символ “+” означает эрмитово сопряжение; а жирная точка между векторными величинами здесь и далее – скалярное умножение.

С учетом приведенного свойства ортогональности операторов первое из уравнений системы (2) преобразуется в уравнение Лапласа для функции $\Phi_1(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(1)} = -\vec{N}_1^+ \cdot \vec{E}^{(1)} = \\
= -\vec{N}_1^+ \cdot (\vec{N}_1 \Phi_1 + \vec{N}_2 \Phi_2 + \vec{N}_3 \Phi_3) = \\
= -\vec{N}_1^+ \cdot \vec{N}_1 \Phi_1 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi_1 \equiv \Delta \Phi_1 = 0.
\end{aligned} \quad (4)$$

Несложно убедиться, что операторы \vec{N}_j коммутируют с оператором Лапласа, то есть

$\vec{N}_j \Delta = \Delta \vec{N}_j$, благодаря чему второе уравнение системы (2) преобразуется в систему трех скалярных уравнений. Подставим разложение (3) в волновое уравнение из системы (2) и, пользуясь свойством коммутативности, приведем его к виду:

$$\sum_{j=1}^3 \vec{N}_j \left[\Delta \Phi_j(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Умножая слева полученное выражение последовательно на \vec{N}_j^+ и учитывая, что $\vec{N}_j^+ \cdot \vec{N}_j \neq 0$, получим три скалярных уравнения:

$$\Delta \Phi_j(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad j=1, 2, 3. \quad (5)$$

Поскольку решается задача об излучении капель электромагнитных волн, естественно принять $\Phi \sim \exp(-i\omega_n t)$, при этом уравнения (5) сведутся к уравнениям Гельмгольца.

Из уравнения (5) при значении индекса $j = 1$ и уравнения (4) получим $(\omega_n^2 / n^2) \Phi_1(\vec{r}, t) = 0$, и поскольку частота колебаний отлична от нуля, то, следовательно, скалярная функция $\Phi_1(\vec{r}, t) = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$, создаваемого колебаниями поверхности незаряженной капли, будет описываться следующим выражением:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) + \vec{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t).$$

В сферической системе координат компоненты $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} & \vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) = \\ & = 0 \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \vec{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t) = -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_3(\vec{r}, t) \vec{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

В силу того что рассматривается осесимметричная задача, в выражениях (6) и (7) следует отбросить слагаемые, содержащие производные по φ , тогда получим:

$$\vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta,$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_3(\vec{r}, t) \vec{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $\Phi_2(\vec{r}, t)$ и $\Phi_3(\vec{r}, t)$ являются решениями уравнений Гельмгольца, имеющих вид:

$$\Delta \Phi_q(\vec{r}, t) - \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_q(\vec{r}, t) = 0, \quad q=2, 3. \quad (9)$$

Решение уравнений (9) для функций $\Phi_q(\vec{r}, t)$ запишется в виде:

$$\Phi_q = \sum_n D_n^{(q)} h_n^{(2)}(kr) \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu), \quad q=2, 3, \quad (10)$$

где $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода, выбираемая из тех соображений, чтобы на асимптотике ($r \rightarrow \infty$) электромагнитная волна расходилась; $k = (\omega_n / c)$ – волновое число.

Неизвестные константы $D_n^{(q)}$ в решениях (10) определяются из граничных условий эквипотенциальности поверхности капли и её незаряженности. Заметим, что для тороидальной компоненты поля $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$, определяемой функцией $\Phi_2(\vec{r}, t)$, эти граничные условия приведут к следующим соотношениям:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t): \vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{\tau} = 0, \quad (11)$$

$$\oint_S \vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \cdot dS = 0, \quad (12)$$

где $\vec{\tau}$ и \vec{n} – единичные векторы касательной и нормали к поверхности капли.

Поскольку величина $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$, а, следовательно, согласно (3), и функции $\Phi_j(\vec{r}, t)$ имеют порядок малости $\sim e\xi$ (или $\sim e^2\xi$), то выражения (11) и (12) для слабых полей можно использовать, исходя из сферической поверхности капли, то есть при $r = R$. При этом вектором $\vec{\tau}$ могут служить орты сферической системы координат \vec{e}_θ и \vec{e}_φ , а вектор нормали \vec{n} будет совпадать с ортом \vec{e}_r (в используемом приближении слагаемыми $\sim e^2\xi$ пренебрегаем).

Согласно (9) тороидальная компонента поля $\left(\vec{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) \right)$ имеет лишь составляющую $\sim \vec{e}_\theta$, и, значит, соотношения (11) и (12) при $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$ удовлетворяются тождественно при любых константах $D_n^{(2)}$ в решении (10). Исходя из условия (11) при $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$ получим

$$r=R: \frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \theta} = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым при любом значении угла θ , то необходимо потребовать обращения в нуль всех констант $D_n^{(2)}$ в решении для $\Phi_2(\vec{r}, t)$. Таким образом, поле $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$ полностью определяется скалярной функцией Φ_3 :

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_3 \Phi_3(\vec{r}, t) \equiv \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r}) \Phi_3(\vec{r}, t)$$

или с учетом (10) получим:

$$\begin{aligned} & \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \\ & = \sum_n \exp(-i\omega_n t) \left\{ D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \left(D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) + D_n^{(3)} \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сферическую функцию Бесселя третьего рода при целых значениях индекса выразим через элементарные функции [11]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^l i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}. \quad (14)$$

Для определения неизвестной константы $D_n^{(3)}$ в (13) учтем, что поверхность проводящей капли эквипотенциальна, то есть проекция вектора на орт касательной к поверхности $\vec{\tau}$ есть нуль:

$$(\vec{\tau}, \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0.$$

Чтобы найти орт $\vec{\tau}$, сначала запишем орт нормали к возмущенной поверхности капли:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left(1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r - \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу осевой симметрии задачи орт касательной к параллелям совпадает с соответствующим ортом сферической системы координат $\vec{\tau}_\phi = \vec{e}_\phi$.

Орт касательной в меридиональном направлении найдем, воспользовавшись векторным соотношением

$$\vec{\tau}_\theta = \vec{n} \times \vec{\tau}_\phi.$$

С учетом (15) выражение для орта касательной запишется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \vec{e}_r + \\ & + \left(1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) и (1) в условие эквипотенциальности проводящей капли и раскладывая полученное выражение в окрестностях сферы, перепишем условие эквипотенциальности капли в виде:

$$E_\theta^{(1)} + \frac{\partial E_\theta^{(0)}}{\partial r} \xi(\theta, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} E_r^{(0)} \Big|_{r=R} = 0, \quad (17)$$

где $E_r^{(0)}$ и $E_\theta^{(0)}$ – соответствующие компоненты вектора напряженности поля нулевого порядка малости по e^2 и ξ :

$$\vec{E}^{(0)} = E_0 \cos \theta \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{e}_\theta. \quad (18)$$

Подстановка выражений для $E_\theta^{(1)}$ из (13), $E_r^{(0)}$ и $E_\theta^{(0)}$ из (18) и возмущения поверхности капли $\xi(\theta, t)$ в виде ряда по полиномам Лежандра в выражение (17) позволяют определить выражение для константы $D_n^{(3)}$ через амплитуды α_n :

$$D_n^{(3)} = - \frac{3E_0 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{n-1} \eta_{n-1}^+ + \gamma_0 \alpha_{n+1} \eta_{n+1}^-}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}; \quad (19)$$

$$\eta_n^+ \equiv \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \quad \eta_n^- \equiv \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Подставляя (19) в (13), получим выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) &= - \frac{3E_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \times \right. \\ & \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_n(t) = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) \mu_{n-1}^+ +$$

$$+ \gamma_0 \alpha_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) \mu_{n+1}^-;$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{(2n+1)}, \quad \mu_n^- = \frac{n}{(2n+1)}.$$

Электрическое поле, создаваемое каплей, колеблющейся во внешнем электрическом поле E_0 , при выполнении условия $R/r \ll 1$ принимает вид волнового поля при $kr = r\omega_n/c \gg 1$ и квазистатического поля при $kr = r\omega_n/c \ll 1$, где r – расстояние от капли до точки наблюдения; $k = \frac{\omega_n}{c}$ – волновое число.

Сферические функции Бесселя третьего рода (сферические функции Ханкеля) при целых зна-

чениях индекса выражаются через элементарные функции [11]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}},$$

$$z = kr. \quad (21)$$

Подставляя (21) и выражение для производной $\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))$

$$\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) = \partial_z (zh_n^{(2)}(z)) =$$

$$= -\exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}} \left(i + \frac{(n-m)}{z} \right)$$

в (20), получим напряженность электрического поля первого порядка малости:

$$\bar{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{3E_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \left(\frac{z_0}{z} \right)^n \exp[-i(z - z_0)] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{z} \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m \frac{n(n+1)P_n(\mu)\bar{e}_r - \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m \left(i + \frac{(n-m)}{z} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz_0)^m \left(i + \frac{(n-m)}{z_0} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta} \right\}, \quad (22)$$

где $z_0 = kR$. Учитывая, что $z_0 \ll 1$, и сохраняя в суммах, стоящих в знаменателях, лишь старшее слагаемое ($m = 0$), выражение (22) представим в виде:

$$\bar{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx \frac{3E_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \frac{(n-1)!}{(2n)!} \frac{z_0^{n+1}}{z^n} \exp[-i(z - z_0)] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{z} \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m n(n+1)P_n(\mu)\bar{e}_r - \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m \left(i + \frac{(n-m)}{z} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\}. \quad (23)$$

Подставим в (23) явный вид коэффициентов $M_n(t)$ и перегруппируем слагаемые в суммах по индексу n :

$$\bar{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx \frac{3E_0}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(i\omega_n t) \left(\frac{z_0}{z} \right)^n$$

$$\exp[-i(z - z_0)] \left[\mu_n^+ \frac{n!}{(2(n+1))!} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \times \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(2(n+1)-m)!}{(n+1-m)!m!} (2iz)^m \left\{ (n+1)(n+2)P_{n+1}(\mu)\bar{e}_r - (iz + (n+1-m)) \frac{\partial P_{n+1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} + \right.$$

$$\left. + \mu_n^- \frac{(n-2)!}{(2(n-1))!} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(2(n-1)-m)!}{(n-1-m)!m!} (2iz)^m \left\{ n(n-1)P_{n-1}(\mu)\bar{e}_r - (iz + (n-1-m)) \frac{\partial P_{n-1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} \right]. \quad (24)$$

Представляет интерес рассмотрение асимптотики этого выражения на больших и малых расстояниях от капли.

Рассмотрим случай волнового поля, то есть поля излучения на больших расстояниях от излучающей капли. При $z \gg 1$ ($kr = r\omega_n/c \gg 1$), сохраняя в выражении (24) в суммах по m старшие слагаемые (с наибольшей степенью z), для напряженности электрического поля запишем:

$$\bar{E}_{wave}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx \frac{3E_0}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(i\omega_n t) \left(\frac{z_0}{z} \right)^n$$

$$\exp[-i(z - z_0)] \left[\mu_n^+ \frac{n!}{(2(n+1))!} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \times \right.$$

$$\times (2iz)^{n+1} \left\{ (n+1)(n+2)P_{n+1}(\mu)\bar{e}_r - iz \frac{\partial P_{n+1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} + \left. + \mu_n^- \frac{(n-2)!}{(2(n-1))!} (2iz)^{n-1} \left\{ n(n-1)P_{n-1}(\mu)\bar{e}_r - iz \frac{\partial P_{n-1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} \right].$$

Несложно заметить, что в рассматриваемом случае радиальной составляющей поля можно пренебречь по сравнению с его угловой и, учитывая, что $z_0 \ll z$, записать для напряженности поля в волновом приближении следующее выражение:

$$\bar{E}_{wave}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx -\frac{3E_0}{2r} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp[i(\omega_n t - z)] (2iz_0)^n \times$$

$$\times \left[(2iz_0)^2 \mu_n^+ \frac{n!}{(2(n+1))!} \frac{\partial P_{n+1}(\mu)}{\partial \theta} + \right. \quad (25)$$

$$\left. + \mu_n^- \frac{(n-2)!}{(2(n-1))!} \frac{\partial P_{n-1}(\mu)}{\partial \theta} \right] \bar{e}_\theta.$$

Рассмотрим случай квазистатического поля или поля в ближайшей окрестности капли. При $z \ll 1$ ($kr = r\omega_n/c \ll 1$), сохраняя в выражении (24) в суммах по m слагаемые с наименьшей степенью z ($m = 0$) и принимая во внимание, что $z_0 \ll z$, для напряженности электрического поля запишем:

$$\bar{E}_{stat}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx \frac{3E_0}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp[i(\omega_n t - z)] \left(\frac{z_0}{z} \right)^n \times$$

$$\times \left[\frac{\mu_n^+}{(n+1)} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \left\{ (n+2)(n+1)P_{n+1}(\mu)\bar{e}_r - (iz + (n+1)) \frac{\partial P_{n+1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_n^-}{(n-1)} \left\{ n(n-1)P_{n-1}(\mu)\bar{e}_r - (iz + (n-1)) \frac{\partial P_{n-1}(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right\} \right].$$

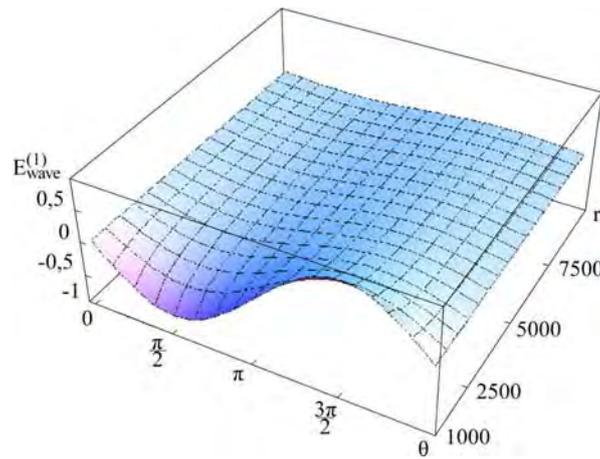


Рис. 1. Зависимость амплитуды напряженности волнового поля (единицы измерения – 10^{-22} CGSE) от угла наблюдения и расстояния (единицы измерения – см), рассчитанная при $n = 2$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\alpha_n = 0,1R$, $R = 30 \cdot 10^{-4}$ см, $E_0 = 0,1$ CGSE.

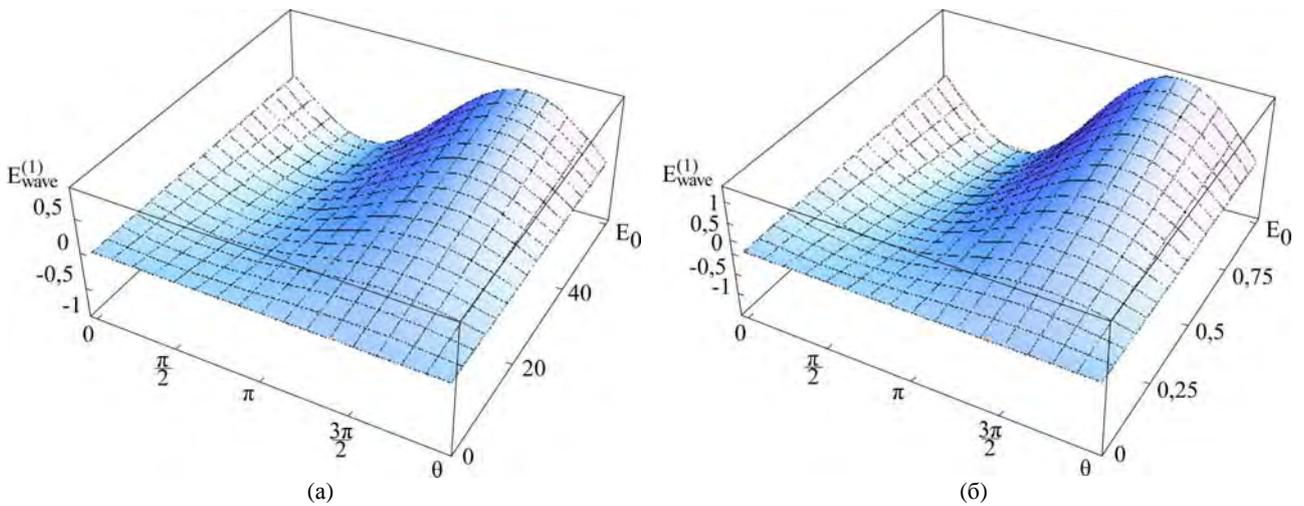


Рис. 2. Зависимость амплитуды напряженности волнового поля от угла наблюдения и напряженности внешнего электрического поля E_0 (единицы измерения – CGSE): (а) – рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1, и $r = 5000$ см (единицы измерения – 10^{-22} CGSE); (б) – рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1 (единицы измерения – 10^{-23} CGSE).

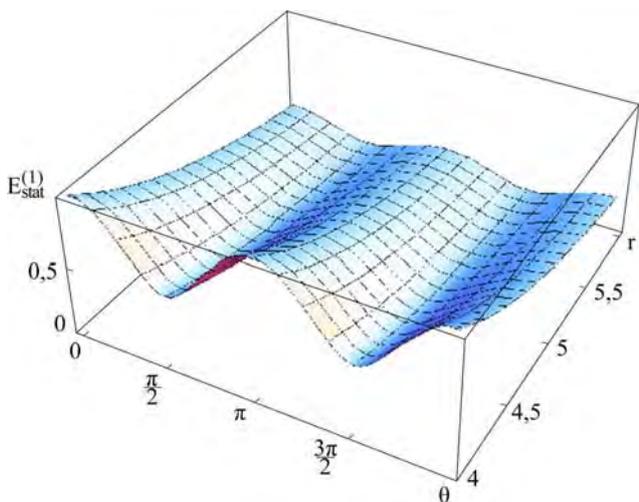


Рис. 3. Зависимость амплитуды напряженности квазистатического поля (единицы измерения – 10^{-11} CGSE) от угла наблюдения и расстояния (единицы измерения – см), рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1.

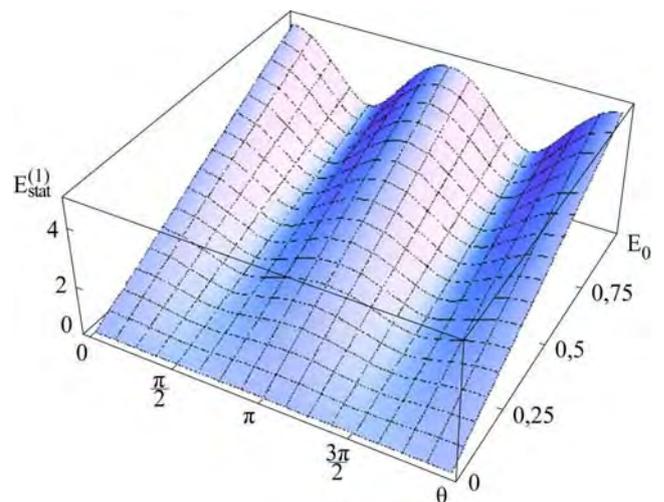


Рис. 4. Зависимость амплитуды напряженности квазистатического поля (единицы измерения – 10^{-11} CGSE) от угла наблюдения и напряженности внешнего электрического поля E_0 , рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1, и $r = 5$ см.

В рамках рассматриваемого приближения, пренебрегая в слагаемых, содержащих производные от полиномов Лежандра, компонентами iz и проводя очевидные сокращения, получим для напряженности поля в квазистатическом приближении:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{stat}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx & \frac{3E_0}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(i\omega_n t) \left(\frac{z_0}{z}\right)^n \exp[-i(z-z_0)] \times \\ & \times \left[\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \mu_n^+ \left\{ (n+2)P_{n+1}(\mu) \vec{e}_r - \frac{\partial P_{n+1}(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\} + \right. \\ & \left. + \mu_n^- \left\{ nP_{n-1}(\mu) \vec{e}_r - \frac{\partial P_{n-1}(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Перегруппируя слагаемые, полученное выражение можно записать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{stat}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx & \frac{3E_0}{r} \exp[-i(z-z_0)] \times \\ & \times \sum_{n=2}^{\infty} \left(\mu_{n-1}^+ \alpha_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) + \mu_{n+1}^- \alpha_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) \right) \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n+1} \times \\ & \times \left\{ (n+1)P_n(\mu) \vec{e}_r - \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\}, \end{aligned}$$

в котором оно полностью совпадает с полученным ранее выражением для электрического поля в окрестности незаряженной капли во внешнем однородном поле другим, электростатическим методом расчета.

Учитывая явный вид коэффициентов μ_n^\pm и заменяя $z \rightarrow kr$ и $z_0 \rightarrow kR$, запишем напряженность электрического поля в волновом и квазистатическом приближениях для случая возбуждения основной моды ($n = 2$). Волновое приближение (см. (25)):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{wave}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx & \frac{6E_0}{5r} \alpha_2 \exp[i(\omega_2 t - kr)] (kR)^2 \\ & \left[\frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} - \frac{(kR)^2}{30} \frac{\partial P_3(\mu)}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Поскольку $z_0 = kR \ll 1$, очевидно, что основной вклад в напряженность электрического поля в волновом приближении определяется первым слагаемым:

$$\vec{E}_{wave}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx -\frac{6E_0}{5r} \alpha_2 \exp[i(\omega_2 t - kr)] (kR)^2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta.$$

Подставив сюда явный вид частоты собственных колебаний капли

$$\omega_n^2 = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{\sigma}{R^3},$$

амплитуду напряженности электрического поля в волновом приближении для основной моды запишем как

$$E_{wave}^{(1)} = -\frac{144}{5} E_0 \frac{\alpha_2}{R} \frac{\sigma}{rc^2} \frac{1}{(2\rho_2 + 3\rho_1)} \sin \theta.$$

Зависимости амплитуды напряженности волнового поля $E_{wave}^{(1)}$ для основной моды от угла наблюдения, расстояния от капли до точки наблюдения r и напряженности внешнего электрического поля E_0 (при разных величинах последнего) представлены на рис. 1 и 2. Видно, что периодичность по углу θ с увеличением расстояния до точки наблюдения сглаживается, а с увеличением напряженности внешнего поля становится более очевидной.

Квазистатическое приближение (см. (26)):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{stat}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx & \frac{3E_0}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \alpha_2 \exp[i(\omega_2 t - kr)] \times \\ & \times \left[\frac{2}{5} \left\{ 2P_1(\mu) \vec{e}_r - \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\} + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{3}{5} \left\{ 4P_3(\mu) \vec{e}_r - \frac{\partial P_3(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $R \ll r$, понятно, что основной вклад в напряженность электрического поля в квазистатическом приближении определяется первой фигурной скобкой:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{stat}^{(1)}(\vec{r}, t) \approx & \frac{6E_0}{5R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \alpha_2 \exp[i(\omega_2 t - kr)] \\ & \{ 2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta \}. \end{aligned}$$

Амплитуда такого поля определена как

$$E_{stat}^{(1)} \approx \frac{6}{5} E_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{\alpha_2}{R} (1 + 3 \cos^2(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Зависимости амплитуды напряженности квазистатического поля $E_{stat}^{(1)}$ для основной моды от расстояния от капли до точки наблюдения r , угла θ и напряженности внешнего электрического поля E_0 представлены на рис. 3 и 4. Качественно зависимости такие же, как на рис. 1 и 2, но степень периодичности меняется.

Квазистатическое электрическое поле определяет электрическое давление на поверхность капли, которое ранее неоднократно рассчитывалось для различных геометрий заряженной поверхности жидкости исходя из других соображений (см., например, [4–6, 9]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен расчет напряженности электрического поля капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле. Получены асимптотики этого выражения на больших и малых расстояниях от капли. Выяснено, что волновое электрическое поле излучения капли (при $kr \gg 1$) существенно отличается от квазистатического (при $kr \ll 1$) и качественно, и количественно: так, амплитудные значения напряженности волнового поля на много порядков меньше квазистатического.

Авторы выражают благодарность Н.А. Богатову.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. O' Konski C.J., Thacher H.C. The Distortion of Aerosol Droplets by an Electric Field. *J Phys Chem.* 1953, **57**, 955–958.
2. Taylor G.I. Disintegration of Water Drops in an Electric Field. *Proc R Soc Lond A.* 1964, **280**, 383–397.
3. Cheng K.J., Chaddock J.V. Deformation and Stability of Drops and Bubbles in an Electric Field. *Phys Lett A.* 1984, **106**(1–2), 51–54.
4. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
5. Григорьев А.И., Синкевич О.А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электростатическом поле. *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985, (6), 10–15.
6. Cheng K.J. Capillary Oscillations of Drop in an Electric Field. *Phys Lett A.* 1985, **112**(8), 392–396.
7. Inculet I.I. Breakup of Large Water Droplets by Electric Fields. *IEEE Transactions on Industry Applications.* 1989, **25**(5), 945–948.
8. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-induced Droplet Ionization: Time-resolved Studies of Distortion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplet Exposed to Strong Electric Fields. *J Phys Chem B.* 2005, **109**, 8244–8250.
9. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей во внешнем электростатическом поле электропроводной капли. *ЖТФ.* 2005, **75**(7), 40–47.
10. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики.* Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.
11. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* М.: Наука, 1979. 830 с.

Поступила 10.07.14

Summary

The carried-out calculations afforded an analytical expression, in the linear approach on indignation amplitude, for the intensity of an electric field of an oscillating uncharged drop of a nonviscous conductive liquid, placed in an electrostatic field. Estimates of the field intensity values, both in the wave approach (at long distances from a drop) and in the quasistationary approach (at a drop surface) are carried out.

Keywords: spheroidal drop, uniform electrostatic field, oscillation, wave and quasistationary approximations.