

# О волновом массопереносе вдоль заряженной жидкой поверхности, обдуваемой диэлектрической средой

Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14/2, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: [belonozhko@mail.ru](mailto:belonozhko@mail.ru)

Построено аналитическое выражение для оценки влияния поверхностного электрического заряда и скорости диэлектрической среды, движущейся над заряженной поверхностью проводящей жидкости, на скорость дрейфа, инициируемого распространением нелинейной периодической волны по границе раздела. Найдена волновая мода, на которой совместное влияние заряда и движения среды сказывается сильнее всего. Показаны общие закономерности дрейфового движения в этих условиях.

*Ключевые слова:* массоперенос, электрически заряженная поверхность, эффект Доплера, граница раздела жидкостей.

УДК [532.59+532.65]:538.93

## ВВЕДЕНИЕ

Заряженная жидкая поверхность является предметом многочисленных исследований, связанных с теорией грозового электричества, с принципами функционирования таких технических устройств, как жидкометаллические источники ионов, установки по электродиспергированию жидкостей (подробнее см. [1–3] и цитированную там литературу). Но все эти исследования связаны с ситуациями, когда жидкость находится в довольно сильных электрических полях, как правило, существенно превышающих 10 кВ/см. В то же время закономерности волнового движения в полях, недостаточных для реализации неустойчивости свободной поверхности, до сих пор исследованы весьма слабо. Перспективы использования небольших электрических полей для управления процессами перераспределения вещества на свободной поверхности и контроля ее динамических свойств являются на сегодняшний день практически новым исследовательским направлением. Как показано в статье [4], величина поверхностного электрического заряда существенно влияет на способность жидкости осуществлять поверхностный перенос вещества, вызываемый распространением по этой поверхности нелинейной периодической волны. В настоящей работе представлены результаты аналитических расчетов интенсивности процесса волнового массопереноса на заряженной поверхности жидкости в условиях, когда эта поверхность обтекается диэлектрической средой, плотность которой меньше, чем плотность жидкости, несущей электрический заряд. Чтобы выделить наиболее важные черты нового феномена, задача рассмотрена в простейшей постановке, которая должна стать отправной точкой будущих исследований, учитывающих дополнительные детали явления.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть две идеальные несжимаемые несмешивающиеся жидкости – нижняя с плотностью  $\rho^d$  и верхняя с плотностью  $\rho^u < \rho^d$  – заполняют в декартовой системе координат  $Oxyz$  полупространства  $z < 0$  и  $z > 0$ . Система координат выбирается таким образом, что ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести  $\vec{g}$ , а плоскость  $Oxy$  определяет уровень границы раздела жидкостей. Коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела  $\gamma$  полагается постоянным. Нижняя жидкость считается идеальным проводником, по поверхности которого распределен электрический заряд с равновесной поверхностной плотностью  $\kappa_0$ , а верхняя – диэлектриком с крайне близкой к единице диэлектрической проницаемостью. Верхняя жидкость движется в положительном направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $U_0$ , обтекая периодическое волновое движение, возбужденное на поверхности раздела, характеризуемое амплитудой  $a$  и волновым числом  $k$ . Ставится задача определения скорости волнового массопереноса вдоль поверхности раздела жидкостей в зависимости от значений поверхностной плотности электрического заряда и скорости верхней среды.

Для решения задачи сначала вычислялось с необходимой точностью эйлерово поле скоростей в обеих средах, которое потом использовалось для вычисления скорости индивидуальных жидких частиц. Из этой скорости в свою очередь выделялась компонента, отвечающая за массоперенос вдоль свободной поверхности. Для простоты движение считалось независимым от координаты  $y$ .

Математическая формулировка задачи расчета эйлерова поля скоростей в верхней и нижней жидкостях имеет вид [5]:

$$\begin{aligned}
z > \xi: \Delta\varphi &= 0; \Delta\Phi = 0; \\
P^u &= p_0 - \rho^u gz - \rho^u \frac{\partial\varphi^u}{\partial t} - \frac{\rho^u}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi^u}{\partial x} + U_0 \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi^u}{\partial z} \right)^2 \right); \\
z = \xi: \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^d}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi^d}{\partial z}; \\
P^d - P^u + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} &= -\gamma \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \\
\nabla\varphi^d \cdot \vec{n} &= (\nabla\varphi + U_0 \vec{e}_x) \cdot \vec{n}; \\
\vec{n} &= \left( -\frac{\partial\xi}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_z \right) / \sqrt{1 + \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2}; \\
z < \xi: \Delta\varphi^d &= 0; \\
P^d &= p_0 - \rho^d gz - \rho^d \frac{\partial\varphi^d}{\partial t} - \frac{\rho^d}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi^d}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi^d}{\partial z} \right)^2 \right); \\
z \rightarrow \infty: \nabla\Phi &\rightarrow -E_0 \vec{e}_z; \nabla\varphi^u \rightarrow 0; z \rightarrow -\infty: \nabla\varphi^d \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\xi \equiv \xi(x, t)$  – функция, описывающая вертикальное отклонение границы раздела от равновесного уровня  $z = 0$ ;  $\varphi^u$  – гидродинамический потенциал верхней жидкости;  $\varphi^d$  – гидродинамический потенциал нижней жидкости;  $\Phi$  – электрический потенциал в верхней области;  $E_0 = 4\pi\kappa_0$  – напряженность электрического поля в равновесном состоянии;  $P^u$  – давление в верхней жидкости;  $P^d$  – давление в нижней жидкости;  $p_0$  – атмосферное давление;  $\vec{n}$  – орт нормали к границе раздела жидкостей.

В предложенной постановке задача описывает волновые движения на поверхности жидкости с длиной волны, существенно меньшей ее амплитуды. На практике целесообразно соотносить полученные результаты с волновым движением, амплитуда которого в 10 и более раз превышает длину волны.

Постановка подразумевает «мгновенное» выравнивание электрического потенциала в процессе волнового движения. Это приближение хорошо работает, когда время релаксации электрического заряда существенно меньше периода волнового движения:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \ll T.$$

Здесь  $\varepsilon \approx 1$  – диэлектрическая проницаемость верхней среды;  $\sigma$  – проводимость нижней жидкости в гауссовой системе единиц. Например, для воды это условие прекрасно выполняется вплоть до миллиметровых волн.

## 2. ВЫДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ

Задача решалась методом разложения по малому безразмерному параметру  $\varepsilon = \alpha\kappa$ . Разложение формы границы раздела жидкостей гидродинамических и электрического потенциалов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \\ \phi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\pi\kappa_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \phi_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi_2 \\ \phi_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^3) \\ O(\varepsilon^3) \\ O(\varepsilon^3) \\ O(\varepsilon^3) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Символ Ландау  $O(\varepsilon^3)$  обозначает остаточные члены, не превосходящие по порядку  $\varepsilon^3$ . Нижние индексы «1» и «2» используются для обозначения порядка малости слагаемых по параметру  $\varepsilon$ . Поскольку волновой массоперенос – это явление второго порядка малости по амплитуде волны [6], то ограничимся рассмотрением задач только первого и второго порядков малости. Проведя стандартную процедуру снесения граничных условий в (1) на невозмущенную поверхность  $z = 0$ , подставляя разложение (2) в соотношения (1) и разбивая задачу по порядкам малости, несложно получить соответствующие формулировки. Для величин первого порядка малости математическая формулировка имеет вид:

$$\begin{aligned}
z > 0: \nabla^2\Phi_1 &= 0; \nabla^2\varphi_1^u = 0; z < 0: \nabla^2\varphi_1^d = 0; \\
z = 0: \frac{\partial\xi_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial z} &= 0; \frac{\partial\varphi_1^u}{\partial z} - U_0 \frac{\partial\xi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial z} = 0; \\
\Phi_1 - E_0\xi_1 &= 0; \\
-\rho^d g\xi_1 - \rho^d \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial t} + \rho^u g\xi_1 + \rho^u \frac{\partial\varphi_1^u}{\partial t} + \\
+\rho^u U_0 \frac{\partial\varphi_1^u}{\partial x} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2} &= 0; \\
z \rightarrow \infty: \nabla\Phi_1 &\rightarrow 0; \nabla\varphi_1^u \rightarrow 0; z \rightarrow -\infty: \nabla\varphi_1^d \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (3)$$

Для величин второго порядка малости математическая формулировка задачи следующая:

$$\begin{aligned}
z > 0: \nabla^2\Phi_2 &= 0; \nabla^2\varphi_2^u = 0; z < 0: \nabla^2\varphi_2^d = 0; \\
z = 0: \frac{\partial\xi_2}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2^d}{\partial z} &= \xi_1 \frac{\partial^2\varphi_1^d}{\partial z^2} - \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial x} \frac{\partial\xi_1}{\partial x}; \\
\Phi_2 - E_0\xi_2 &= -\xi_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \\
-\rho^d g\xi_1 - \rho^d \frac{\partial\varphi_2^d}{\partial t} + \rho^u g\xi_2 + \rho^u \frac{\partial\varphi_2^u}{\partial t} + \\
+\rho^u U_0 \frac{\partial\varphi_2^u}{\partial x} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2} &= \\
= \frac{\rho^d}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{\rho^u}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi_1^u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi_1^u}{\partial z} \right)^2 \right) + 2U_0 \xi_1 \frac{\partial^2\varphi_1^u}{\partial x \partial z} + \\
+\rho^d \xi_1 \frac{\partial^2\varphi_1^d}{\partial z \partial t} - \rho^u \xi_1 \frac{\partial^2\varphi_1^u}{\partial z \partial t} - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2};
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_2''}{\partial z} - U_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2^d}{\partial z} = \\ & = -\xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1^d}{\partial z^2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^d}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1''}{\partial z^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1''}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$z \rightarrow \infty: \nabla \Phi_2 \rightarrow 0; \nabla \varphi_2'' \rightarrow 0; z \rightarrow -\infty: \nabla \varphi_2^d \rightarrow 0.$$

Решая поочередно задачи (3) и (4), получим выражения для гидродинамических потенциалов верхней и нижней жидкостей, пространственные производные от которых дают компоненты эйлерова поля скоростей.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Для задачи первого порядка малости (10) несложно найти решение вида бегущей волны:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} a \varepsilon \left( \exp(St - ikx) + \exp(\bar{S}t + ikx) \right);$$

$$\varphi_1^d = \frac{1}{2} \varepsilon \left( A \exp(St - ikx) + \bar{A} \exp(\bar{S}t + ikx) \right) \exp(kz); \quad (5)$$

$$\varphi_1'' = \frac{1}{2} \varepsilon \left( B \exp(St - ikx) + \bar{B} \exp(\bar{S}t + ikx) \right) \exp(-kz);$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon C \left( \exp(St - ikx) + \exp(\bar{S}t + ikx) \right) \exp(-kz).$$

Здесь  $A = aS/k$ ,  $B = a(-S/k + iU_0)$ ,  $C = aE_0$  – константы, а черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту волнового движения  $S$  с волновым числом и другими параметрами задачи, выглядит следующим образом:

$$S = \frac{ikU_0 \rho'' \pm \sqrt{k \left( g \left( -(\rho^d)^2 + (\rho'')^2 \right) + k \left( U_0^2 \rho^d \rho'' - (\rho^d + \rho'') \left( k\gamma - W \sqrt{\rho^d g\gamma} \right) \right) \right)}}{\rho^d + \rho''}, \quad (6)$$

здесь  $W = 4\pi k_0^2 / \sqrt{\rho^d g\gamma}$  – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля (квадрат безразмерной поверхностной плотности электрического заряда), характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на гребнях волн. Мнимая часть комплексной частоты описывает круговую частоту волнового движения  $\omega = \text{Im}(S)$ , а действительная часть  $r = \text{Re}(S)$  в зависимости от знака: либо декремент затухания волнового движения, если  $r < 0$ , либо инкремент нарастания неустойчивости, если  $r > 0$ .

Если подкромное выражение меньше нуля:

$$\begin{aligned} \Omega = & g \left( -(\rho^d)^2 + (\rho'')^2 \right) + \\ & + k \left( U_0^2 \rho^d \rho'' - (\rho^d + \rho'') \left( k\gamma - W \sqrt{\rho^d g\gamma} \right) \right) < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

то волновое движение представляет собой периодическую бегущую волну.

Если  $\Omega > 0$ , то амплитуда любого начального волнового возмущения экспоненциально нарастает. Соответствующее решение описывает начальную стадию развития неустойчивости границы раздела.

При этом если скорость верхней среды равна нулю  $U_0 = 0$ , то неустойчивость вызывается исключительно электрическими силами за счет их преобладания над поверхностными силами Лапласа. Такая неустойчивость называется неустойчивостью Тонкса-Френкеля [7]. На начальной стадии она представляет собой аперидическое нарастание амплитуд начальных возмущений (частички жидкости на гребнях волнового возмущения монотонно двигаются вверх с экспоненциально нарастающей скоростью). На финальной стадии суперпозиция возмущений с различными волновыми числами формирует эмиссионные выступы – конусы Тейлора, с которых происходит имитирование маленьких сильно заряженных капелек [1–3]. За интенсивность развития неустойчивости отвечает параметр Тонкса-Френкеля  $W$ . Неустойчивость волны с волновым числом  $k$  при  $U_0 = 0$  реализуется, если только величина  $W$  превышает критическое значение:

$$W_* = \frac{g(\rho^d - \rho'') + k^2 \gamma}{k \sqrt{g \rho^d \gamma}}. \quad (8)$$

Если же поверхностная плотность электрического заряда равна нулю  $W = 0$ , то причиной неустойчивости являются чисто аэродинамические подъемные силы, действующие со стороны верхней движущейся среды на горбы волновых возмущений. Такая неустойчивость называется неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца. Она, в отличие от неустойчивости Тонкса-Френкеля, имеет колебательный характер – частичка жидкости совершает колебательное движение с нарастающей амплитудой [8]. Такая неустойчивость развивается тем интенсивнее, чем больше скорость верхней среды  $U_0$ . Неустойчивость моды с волновым числом  $k$  при  $W = 0$  может реализоваться, если только  $U_0$  превышает пороговое значение:

$$U_* = \sqrt{\frac{k^2 \gamma (\rho'' + \rho^d) + g \left( -(\rho'')^2 + (\rho^d)^2 \right)}{k \rho'' \rho^d}}. \quad (9)$$

В общем случае, когда  $U_0 \neq 0$ ,  $W \neq 0$ , волны, подчиняющиеся условию  $\Omega > 0$ , претерпевают комбинационную неустойчивость, вызванную и электрическими, и аэродинамическими силами. Если  $W$  и  $U_0$  недостаточно велики для реализации условия (7), волновое движение является

устойчивым, а сами параметры  $W$  и  $U_0$  оказывают управляющее воздействие на его частоту.

#### 4. ВЫБОР АКТУАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Физический механизм возникновения волнового дрейфового движения на границе раздела двух сред состоит в следующем [6]: при распространении по границе раздела двух жидкостей периодической нелинейной волны индивидуальная жидкая частичка движется по сложной петлеобразной траектории, отдельный виток которой близок по форме к окружности. Частичка нижней жидкости, примыкающая к границе раздела, сначала движется по верхней части дуги окружности, затем опускается, движется по нижней части дуги окружности и снова поднимается. Но из-за затухания движения с глубиной скорость на нижней части витка будет немного меньше, и, следовательно, жидкая частичка вернется не в исходное положение, а в немного смещенное относительно него в сторону направления распространения волны. С течением времени это смещение накапливается и образует средний дрейф. Чем больше частота волнового движения, тем чаще жидкая частица совершает виткообразные движения и тем чаще происходит ее сдвиг, дающий вклад в среднее дрейфовое движение, отвечающее за массоперенос. Волновой дрейф будет существенным эффектом в условиях, когда колебательное движение, обеспечивающее описанный горизонтальный возврат со сдвигом жидкой частички, будет доминировать над другими типами движений – аперiodическим нарастанием амплитуды или нарастанием с инкрементом, существенно превышающим частоту волнового движения. В связи со сказанным наиболее актуальным представляется исследовать волновой дрейф при таких значениях  $U_0$  и  $W$ , когда связанные с ними неустойчивости не реализуются, то есть при выполнении условия (7).

Наиболее интересной для исследования волновой модой является та, поведение которой наиболее чувствительно к значениям скорости верхней среды  $U_0$  и к величине поверхностного заряда, характеризуемого параметром Тонкса-Френкеля  $W$ . Сильное влияние значений параметров  $U_0$  и  $W$  на такую моду означает и существенное воздействие на связанный с ней волновой массоперенос. Появляется возможность наделить  $U_0$  и  $W$  статусом параметров, управляющих процессом массопереноса.

Анализ условия (7) показывает, что наиболее чувствительной к значениям  $U_0$  и  $W$  является волновая мода с волновым числом  $k = \sqrt{1-\rho}$

( $\rho = \rho'' / \rho^d$ ). На рис. 1 на плоскости параметров ( $U_0, W$ ) изображены границы области устойчивых волновых движений. Кривые построены при различных значениях волнового числа. Расчеты выполнены в безразмерных переменных, в которых  $\rho^d = g = \gamma = 1$ , при  $\rho'' / \rho^d = \rho = 10^{-3}$  (на практике – граница вода-воздух). Для перехода к размерным переменным значения безразмерных параметров нужно умножить на соответствующие характерные масштабы. В частности, характерным масштабом длины будет капиллярная постоянная  $\sqrt{\gamma / (\rho^d g)}$  ( $\approx 0,28$  см для границы вода-воздух), а для скорости – масштаб  $\sqrt{g\gamma / \rho^d}$  ( $\approx 16,4$  см/с для границы вода-воздух). Рис. 1 иллюстрирует тот факт, что при  $k = \sqrt{1-\rho}$  размер области устойчивости волнового движения наименьший. Это означает, что при постепенном увеличении значений  $U_0$  и  $W$  (в любой пропорции) волновая мода с  $k = \sqrt{1-\rho}$  раньше других потеряет устойчивость. Именно в этом смысле такое волновое число является наиболее чувствительным к значениям  $U_0$  и  $W$ . Кроме того, анализируя выражение (6), несложно установить, что при выполнении условия (7) изменение значений  $U_0$  и  $W$  вызывает наибольшие изменения в значении частоты именно при  $k = \sqrt{1-\rho}$ .

Резюмируя сказанное, можно заключить, что интереснее исследовать закономерности волнового массопереноса в рассматриваемой системе для волны с волновым числом  $k = \sqrt{1-\rho}$  при выполнении условия (7).

#### 5. ПРИНЦИП РАСЧЕТА ДРЕЙФОВОГО ДВИЖЕНИЯ

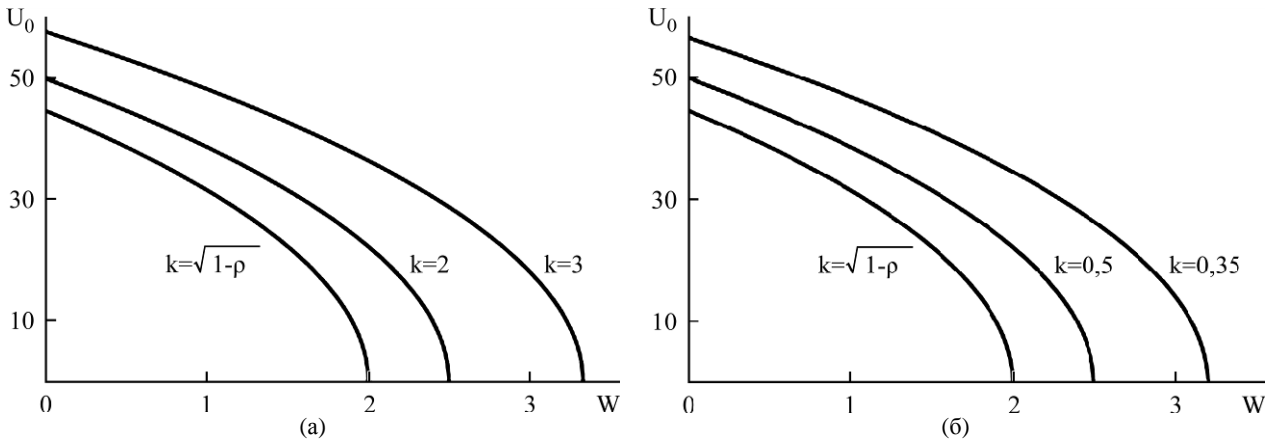
В монографии [6] показано, что горизонтальная составляющая скорости выделенной жидкой частички (скорость индивидуальной жидкой частички) во втором приближении по амплитуде волны в нижней жидкости  $V^d$  и в верхней жидкости  $V''$  выражается через эйлеровы скорости  $\partial\varphi_j^d / \partial x$ ,  $\partial\varphi_j^d / \partial z$ ,  $\partial\varphi_j'' / \partial x$ ,  $\partial\varphi_j'' / \partial z$  ( $j = 1; 2$ ), которые находятся из решений задач (3), (4). Вычисление следует выполнять по формулам [6]:

$$V^d = \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^d}{\partial x} + \left( \int_0^t \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial x} d\tau \right). \quad (10)$$

$$\cdot \frac{\partial^2\varphi_1^d}{\partial x^2} + \left( \int_0^t \frac{\partial\varphi_1^d}{\partial z} d\tau \right) \cdot \frac{\partial^2\varphi_1^d}{\partial x \partial z};$$

$$V'' = \frac{\partial\varphi_1''}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2''}{\partial x} + \left( \int_0^t \frac{\partial\varphi_1''}{\partial x} d\tau \right). \quad (11)$$

$$\cdot \frac{\partial^2\varphi_1''}{\partial x^2} + \left( \int_0^t \frac{\partial\varphi_1''}{\partial z} d\tau \right) \cdot \frac{\partial^2\varphi_1''}{\partial x \partial z}.$$



**Рис. 1.** Границы устойчивости волновых движений по отношению на плоскости безразмерных параметров ( $U_0$ ,  $W$ ), построенных при различных значениях волновых чисел:  $k \geq \sqrt{1-\rho}$  (а) и  $k \leq \sqrt{1-\rho}$  (б).

Из этих соотношений видно, что производные от потенциалов второго порядка малости входят в выражение для скорости индивидуальной жидкой частицы линейным образом. Поэтому если они окажутся периодическими выражениями, то при вычислении скорости среднего дрейфового течения (при усреднении выражений (10), (11)) они дадут нулевой вклад в результирующее выражение. В том, что они периодические, несложно убедиться. Если подставить решения (5) в неоднородности в соотношениях (4), то, невзирая на громоздкость полученных выражений, легко установить, что они являются функциями периодическими по времени и по горизонтальной координате. Отсюда следует, что таким же свойством будут обладать и потенциалы второго порядка малости и их производные по координатам. Такими же периодическими свойствами обладают и потенциалы первого порядка малости, но они входят в (10) и (11) не только линейно, но и в виде нелинейных интегральных слагаемых. Можно заключить, что при усреднении (10), (11) по времени и длине волны ненулевой вклад в результирующее выражение дадут только интегральные слагаемые.

## 6. РАСЧЕТ СКОРОСТИ МАССОПЕРЕНОСА В НИЖНЕЙ ЖИДКОСТИ

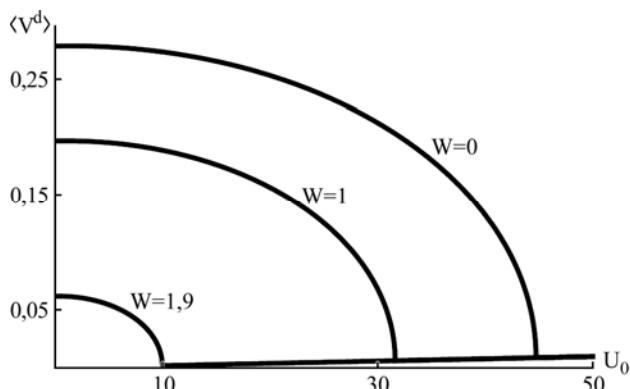
Подставляя выражения для потенциалов первого порядка малости в интегральные слагаемые (10), усредняя по периоду и длине волны, несложно получить выражение для среднего дрейфа в нижней жидкости:

$$\langle V^d \rangle = \frac{1}{2} a^2 k \omega^d \exp(2kz). \quad (12)$$

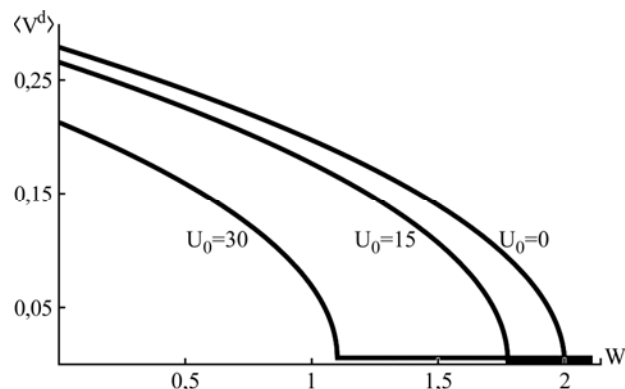
Здесь  $\omega^d$  – круговая частота волнового движения, которую можно определить, взяв мнимую часть от комплексной частоты (6). На рис. 2 показана зависимость скорости дрейфа нижней жидкости

$\langle V^d \rangle$  от величины скорости верхней среды  $U_0$  при различных значениях параметра Тонкса-Френкеля  $W$ . Как и в случае «чистой» неустойчивости Тонкса-Френкеля, дрейфовая скорость заметно снижается с увеличением значения поверхностного электрического заряда. Из соотношения (6) следует, что и увеличение электрического заряда, и увеличение скорости верхней жидкости уменьшают частоту волнового движения. Значит, частица жидкости с увеличением этих параметров будет реже совершать колебательные движения и периодически сдвигаться в сторону распространения волны.

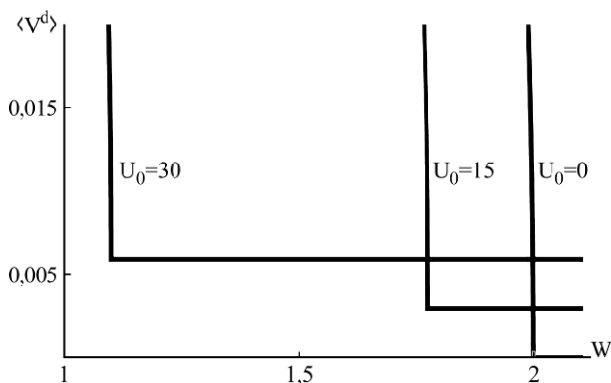
На рис. 3 показана зависимость дрейфовой скорости в нижней жидкости от параметра Тонкса-Френкеля при различных значениях скорости  $U_0$ . Видно, что чем больше скорость среды над жидкостью, тем сильнее электрический заряд уменьшает скорость дрейфового движения, – влияние движения верхней среды и поверхностного электрического заряда взаимно усиливают друг друга. Интересно, что при ненулевом значении  $U_0$  дрейфовая скорость не обращается в нуль ни при каких значениях поверхностного электрического заряда. Для удобства иллюстрации этого факта зависимости, представленные на рис. 3, изображены на рис. 4 в более крупном масштабе. Из рисунков видно, что в присутствии движения верхней среды скорость дрейфа с увеличением заряда достигает минимального ненулевого значения при выходе параметров системы на пороговые в смысле реализации неустойчивости значения. Таким образом, при наличии движущейся диэлектрической среды над заряженной поверхностью жидкого проводника дрейфовое движение в проводнике можно замедлить, увеличивая поверхностную плотность электрического заряда, но нельзя полностью остановить.



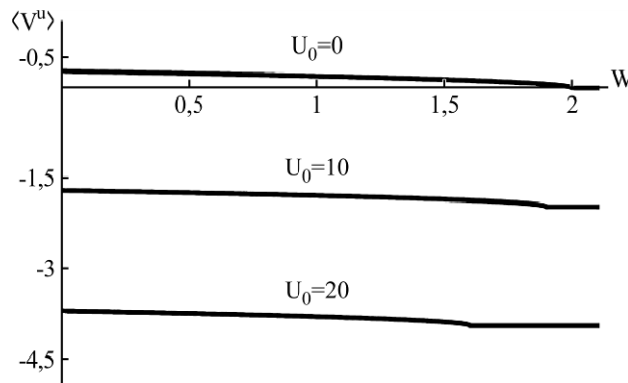
**Рис. 2.** Зависимость безразмерной скорости среднего дрейфа нижней жидкости  $\langle V^d \rangle$  на уровне  $z = 0$  от безразмерной скорости верхней среды  $U_0$ , рассчитанная по формуле (12) при различных значениях параметра Тонкса-Френкеля  $W$ . Волна, вызывающая дрейф, характеризуется безразмерным волновым числом  $k = \sqrt{1-\rho}$  и безразмерной амплитудой  $a = 0,1 \cdot 2\pi/k$ .



**Рис. 3.** Зависимость безразмерной скорости среднего дрейфа нижней жидкости  $\langle V^d \rangle$  на уровне  $z = 0$  от безразмерного параметра Тонкса-Френкеля  $W$ , рассчитанная по формуле (12) при различных значениях безразмерной скорости верхней среды  $U_0$ . Амплитуда и волновое число волны, вызывающей дрейф, такие, как для рис. 2.



**Рис. 4.** Те же зависимости, что и на рис. 3, но в более крупном масштабе.



**Рис. 5.** Зависимость безразмерной скорости среднего дрейфа верхней жидкости  $\langle V^u \rangle$  от безразмерного параметра Тонкса-Френкеля  $W$ , рассчитанная по формулам (13), (12), при различных значениях безразмерной скорости верхней среды  $U_0$ . Амплитуда и волновое число волны, вызывающей дрейф, такие, как для рис. 2-4.

## 7. РАСЧЕТ СКОРОСТИ МАССОПЕРЕНОСА В ВЕРХНЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрим дрейфовую добавку к скорости  $U_0$  в верхней движущейся среде. Она рассчитывается следующим образом:

$$\langle V^u \rangle = \frac{1}{2} a^2 k \omega^u \exp(-2kz). \quad (13)$$

Внешне формула (13) похожа на формулу для расчета дрейфа нижней жидкости. Однако входящую в формулу круговую частоту волнового движения в верхней жидкости  $\omega^u$  следует специальным образом рассчитывать. Дело в том, что расчет скорости индивидуальной жидкой частицы в виде (10), (11) справедлив только в системе отсчета, в которой порядок скорости жидкой частицы имеет первый порядок малости по амплитуде волны [8]. Чтобы вернуться в границы применимости формул (10), (11), необходимо перейти в новую систему отсчета, связан-

ную с верхней жидкостью, и выполнить расчет гидродинамического потенциала верхней жидкости в новой системе отсчета. В новой системе, движущейся с постоянной скоростью  $U_0$  относительно старой, наблюдатель зафиксирует частоту волнового движения, которая отлична от той, что регистрировалась в старой системе отсчета, — скажется влияние эффекта Доплера.

С учетом сказанного формулы для гидродинамического потенциала и комплексной частоты в новой системе отсчета примут вид:

$$\varphi_1^u = -\frac{aS^u}{k} \exp(-kz) \exp(S^u t - ikx), \quad (14)$$

$$S^u = \frac{-ikU_0\rho^d \pm \sqrt{k \left( g(-\rho^d)^2 + (\rho^u)^2 \right) + k \left( U_0^2 \rho^d - (\rho^d + \rho^u) (k\gamma - W\sqrt{\rho^d g\gamma}) \right)}}{\rho^d + \rho^u}. \quad (15)$$

Теперь, зная значение  $\omega^u = \text{Im}(S^u)$ , несложно рассчитать дрейфовую добавку к скорости верхней жидкости  $\langle V^u \rangle$  по формуле (11). Справедливость описанных выше рассуждений можно про-

верить, непосредственно решив задачу (1) в системе отсчета, движущейся вместе с верхней средой.

На рис. 5 показана зависимость дрейфовой добавки к скорости верхней среды от параметра  $W$  при различных значениях  $U_0$ . Качественно эта зависимость похожа на зависимость, представленную на рис. 3 и 4, откуда видно, что дрейфовая добавка к скорости  $U_0$  отрицательна и тем меньше, чем больше скорость верхней среды.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчет интенсивности процесса волнового массопереноса на заряженной поверхности жидкости в условиях, когда эта поверхность обтекается диэлектрической средой, плотность которой меньше, чем плотность жидкости, несущей электрический заряд, показал, что поверхностный электрический заряд и скорость внешней среды оказывают существенное влияние на скорость массопереноса. Массоперенос и в жидкости, и в верхней среде происходит в направлении распространения волны. В нижней жидкости его скорость пропорциональна квадрату амплитуды волны. В верхней среде появляется отрицательная добавка к  $U_0$ , модуль которой тоже пропорционален квадрату амплитуды волны. Эффект волнового массопереноса наиболее отчетливо проявляет себя при докритических значениях скорости верхней среды и поверхностной плотности электрического заряда в смысле реализации неустойчивости границы раздела. Увеличение значений этих параметров снижает интенсивность волнового массопереноса. При неподвижной верхней среде эта интенсивность, благодаря увеличению поверхностной плотности электрического заряда, может быть уменьшена до нуля. Если же среда над жидкостью движется, то значение скорости волнового массопереноса можно уменьшить только до некоторого минимального значения. Для успешного расчета скорости массопереноса в верхней среде по известному эйлеровому полю скоростей целесообразно переходить в движущуюся вместе с ней систему отсчета, учитывая при этом влияние эффекта Доплера на частоту волнового движения.

Таким образом, докритический поверхностный заряд совместно с движением диэлектрической среды над поверхностью жидкости существенно изменяет динамические свойства жидкой поверхности – способность к переносу вещества и частоту волнового движения. Результат имеет базовое значение для построения более совершенных моделей обнаруженного явления и разработки способов его использования для бесконтактной модификации динамических свойств поверхности жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коженков В.И., Фукс Н.А. Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор). *Успехи химии*. 1976, **45**(12), 2274–2284.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И. ЭГД неустойчивости в дисперсных системах (обзор). *Научное приборостроение*. 1991, **1**(3), 25–43.
3. Жакин А.И. Электрогидродинамика заряженных поверхностей. *УФН*. 2013, **183**(2), 153–177.
4. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. О дрейфовых свойствах волнового пакета, распространяющегося по заряженной поверхности жидкости. *ЭОМ*. 2014, **50**(4), 35–41.
5. Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости*. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 288 с.
6. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане*. Ч.1. М.: Мир, 1981. 480 с.
7. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
8. Дразин Ф. *Введение в теорию гидродинамической устойчивости*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 288 с.

Поступила 29.12.14

После доработки 27.02.15

## Summary

An analytical expression is constructed to estimate the influence of the surface electric charge and dielectric environment velocity moving above inviscid conductive liquid on the drift caused by propagation of a nonlinear periodic wave on a horizontal surface between the liquid and the environment. The calculation has been made of the wave number of the wave most sensitive to the charge value and environment motion. General regularities of the drift motion are established.

*Keywords:* mass transfer, electrically charged surface, Doppler effect, fluids interface.