

3. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Механизм развития ступенчатого лидера и внутриоблачного ветвления линейной молнии // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–14.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., 1954.
7. Саранин В.А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров // УФН. 1999. Т.169. N 4. С. 453–458.
8. Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. О взаимодействии двух заряженных проводящих шаров при малых расстояниях между ними // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 15–19.
9. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., 1961.
10. Панченков Г.М., Цабек Л.К. Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М, 1969.

Поступила 8.05.02

### Summary

The electrostatic interaction of two isolated earthed uncharged ideally conductive spheres of different radiuses placed in an uniform electric field is investigated. It have been shown that dependence of their polarization interaction forces on distance between centers at small distances much more weak compare to electrostatic interaction of two infinitesimal dipoles.

---

Т.В. Левчук, М.В. Рыбакова, С.О. Ширяева

## О СПОНТАННОМ РАСПАДЕ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский государственный университет им. Демидова.  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Капиллярный распад заряженных струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в различных направлениях техники и химической технологии [1, 2]. Поэтому неоднократно исследовался экспериментально [3, 4] и теоретически [5–11]; тем не менее, некоторые его аспекты остаются неясными. Сказанное относится, в частности, к изучению закономерностей реализации спонтанного распада осесимметричных струй. До сих пор все задачи по диспергированию струй теоретически рассматривались в основном для осесимметричного случая, хотя в реальности чаще всего приходится иметь дело с неосесимметричными струями. В экспериментальных работах [3, 4] подтверждается увеличение влияния осесимметричного распада с ростом величины подаваемого на струю электрического потенциала. В ряде статей подробно исследован распад во внешнем электростатическом поле свободно падающих заряженных капель, диспергирование которых связано с выбросом и распадом струй. Например, в [12] зафиксирован выброс с противоположных вершин капли вдоль направления внешнего электростатического поля струй жидкости, распадающихся на отдельные дочерние капельки осесимметричным образом. При экспериментальном исследовании электростатического распыления жидкости с торца капилляра также наблюдается выброс с вершины мениска жидкости на торце капилляра тонких струек жидкости, распадающихся осесимметричным образом на дочерние капельки [13]. Наличие осесимметричного распада струй жидкости в экспериментах приводит к большому разнообразию наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкости [14, 15]. Поэтому целью этой работы является исследование особенностей реализации неустойчивости осесимметричных заряженных струй электропроводной жидкости.

Рассмотрим бесконечную движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью  $\vec{U}_0$  цилиндрическую струю радиуса  $R$  вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , поддерживаемую при постоянном электрическом потенциале  $\Phi_0$ . Будем считать, что жидкость является идеально проводящей, и электрический заряд распределен по цилиндрической в отсутствие возмущений поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда  $\chi_0$ . Так как рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью  $\vec{U}_0$ . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  полностью определяется возможными капиллярными колебаниями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. В нулевом приближении будем иметь неподвижный цилиндрический столб жидкости, а также известные выражения для лапласовского давления под цилиндрической поверхностью и давления электрического поля на поверхность равномерно заряженного бесконечного цилиндра фиксированного радиуса.

Математическая формулировка задачи для величин первого порядка малости в безразмерных переменных, в которых радиус струи  $R$ , плотность жидкости  $\rho$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  равны единице, состоит из уравнений гидродинамики и электростатики:

$$r = 1 + \xi(z, \phi, t); \quad |\xi(z, \phi, t)| \ll 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u}; \quad \nabla \vec{u} = 0; \quad (2)$$

$$\Delta \cdot \varphi = 0; \quad (3)$$

$$r = 1: \quad \frac{d\xi}{dt} = u_r;$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} + p_\sigma - p_\chi = 0; \quad ; \quad (5)$$

$$p_\sigma = [\nabla \cdot \vec{n}]_{r=1+\xi}; \quad p_\chi = \frac{(\nabla \varphi)^2}{8\pi}; \quad (6)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\vec{u}| < \infty;$$

$$r = 1: \quad \varphi = \text{const}; \quad (7)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \varphi| \rightarrow 0;$$

где  $\xi(z, \phi, t)$  – возмущение поверхности, вызванное ее капиллярными колебаниями,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $u_r, u_\phi, u_z$  – компоненты поля скоростей,  $\varphi$  – электрический потенциал,  $p(\vec{r}, t)$  – гидродинамическое давление,  $p_\chi$  – давление электрических сил и  $p_\sigma$  – поверхностное натяжение. В уравнениях (1) – (7) величины  $\varphi, p, P, p_\chi, p_\sigma$  – добавки первого порядка малости по  $|\xi|$ , вызванные капиллярными колебаниями.

Решение сформулированной задачи ищем методом скаляризации [16] в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$ , в виде разложения по малому параметру  $\xi(z, \phi, t)$ , раскладывая поле скоростей

$\vec{u}(\vec{r}, t)$  на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов  $\hat{N}_i$ :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{N}_j \Psi_j(\vec{r}, t); \quad (8)$$

где  $\Psi_j(\vec{r}, t)$  – произвольные скалярные функции.

После подстановки выписанных решений в граничные условия получается однородная система линейных алгебраических уравнений для определения амплитудных значений электрического и гидродинамического потенциалов. Ее решение существует только если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:  $\det[a_{ij}] = 0$ , где  $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ . Это условие дает дисперсионное уравнение задачи:

$$\begin{aligned} & s^2 \left\{ m(l^2(l^2 - k^2) - 4k^2m(m-1) - 2l^2(k^2 - m(m-1))) + \right. \\ & + lF_m(l) \left[ l^2(l^2 + k^2) - 4m(l^2 - k^2) + 2m^2l^2 \right] - 2l^2(l^2 + k^2)F_m^2(l) - \\ & \quad \left. - 4k^3F_m(k) \left[ l^2 + m(m-2) - 2lF_m(l) \right] \right\} + \\ & + 2sv \left\{ m(l^2 - k^2) \left( m(m-1)(l^2 + k^2) + k^2(l^2 + m(m-1)) \right) + \right. \\ & + lF_m(l) \left[ l^2(l^2 + k^2)(k^2 + m(m-1)) + 2l^2m(m-1)(k^2 - m(m+1)) + \right. \\ & \quad \left. + 4k^2m^2(m^2 - 1) \right] - 2l^2F_m^2(l) \left[ k^2(l^2 + k^2) + m(m^2 - 1)(l^2 - k^2) \right] + \\ & - kF_m(k) \left( ml^2(k^2(2m-1) + l^2 + 2m(m^2 - 1)) + 2k^4(l^2 + m(m-2)) - \right. \\ & \quad \left. - lF_m(l) \left[ 4k^2(k^2 + m(m^2 - 1)) + l^2(k^2 - 4m(m^2 - 1)) - l^4 \right] + \right. \\ & \quad \left. + 2l^2F_m^2(l)(l^2 - k^2)(m^2 - 1) \right\} = \\ & = \left( 1 - m^2 - k^2 - w \left[ 1 + m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right] \right) \left\{ m(ml^2(l^2 - k^2) + \right. \\ & \quad + lF_m(l) \left[ l^2(l^2 - k^2) - 2m(l^2 - 2k^2) \right] - 2l^2(l^2 - k^2)F_m^2(l) + \\ & \quad \quad \left. + kF_m(k) \left( m(l^2(l^2 - k^2) - 2ml^2) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + lF_m(l)(l^2 - k^2)(l^2 - 4m) - 2l^2(l^2 - k^2)F_m^2(l) \right) \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $F_m(x) = \frac{I_{m+1}(x)}{I_m(x)}$ ;  $w = 4\pi\chi_0^2$ ;  $l^2 = k^2 + \frac{s}{v}$ ;  $k$  – волновое число,  $m$  – число, характеризующее осесимметричность решения,  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода,  $\chi_0$  – поверхностная плотность заряда.

При  $\chi_0 = 0$  выражение (9) совпадает с приведенным в [17] дисперсионным уравнением для струи вязкой жидкости.

Дисперсионное уравнение задачи довольно громоздко, однако для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие  $l \gg k$ , оно принимает простой вид:

$$s^2 + 2svD(m, k) = f(m, k, w); \quad (10)$$

где  $D(m, k) \equiv k^2 + m(m-1) - F_m(k)$ ;

$$f(k, m, w) = \left( 1 - m^2 - k^2 - w \left[ 1 + m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right] \right) (m + kF_m(k)).$$

При малой вязкости линейное по  $s$  слагаемое в этом уравнении, как и в [17] можно опустить:

$$s^2 = f(m, k, w). \quad (11)$$

Несложно видеть, что при  $f > 0$  соотношение (11) определяет инкремент нарастания неустойчивости цилиндрической волны  $s = \sqrt{f}$ . Приравнявая нулю первую производную от инкремента по волновому числу, можно найти волновое число капиллярной волны с максимальным значением инкремента, и подставив его в (11), найти величину самого инкремента. На рис. 1,а,б приведены результаты подобных расчетов, произведенных с помощью программы аналитических расчетов “Математика”, в виде зависимостей:  $s = s(w)$ ,  $k = k(w)$  для первых пяти значений азимутального числа  $m$ .

Из рис. 1,а видно, что величины инкрементов осесимметричной моды  $m = 0$  и осесимметричных мод  $m = 1, 2, 3, 4$ , заметно различающиеся при малых значениях  $w$ , при достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда  $\chi_0$  (при больших значениях параметра  $w$ ) становятся примерно равными. Согласно рис.1,б в такой ситуации волновые числа осесимметричных волн заметно превышают волновое число осесимметричной волны. Сказанное означает, что оптимальными условиями для реализации неустойчивости поверхности при одном и том же значении электрического потенциала струи обладают сразу осесимметричная и несколько осесимметричных мод колебаний, различающиеся волновыми числами наиболее неустойчивых волн. Таким образом, струя будет дробиться на капли различных размеров и будет неустойчива по отношению к смещению струи относительно оси симметрии и к закручиванию вокруг своей оси. “Хлыстообразное” (согласно терминологии [2]) движение наблюдается при  $m = 1$ , искажение формы сечения струи связано с более высокими модами  $m = 2, \dots$ , что и наблюдалось в экспериментах [4, 12, 13].

В более общей ситуации, когда линейным по  $S$  слагаемым в (10) пренебрегать нельзя, соответствующий инкременту неустойчивости положительный корень этого уравнения запишется в виде

$$s = -vD(m, k) + \sqrt{v^2 D^2(m, k) + f(m, k, w)}. \quad (12)$$

Несложно видеть, что критические условия реализации неустойчивости струи в используемом приближении от вязкости не зависят. В самом деле, критические условия реализации неустойчивости струи невязкой жидкости определяются согласно (11) условием  $f > 0$ , при выполнении обратного неравенства  $s$  становится мнимым, что соответствует периодическому во времени изменению амплитуды волн. Из (12) видно, что условие появления положительных решений уравнения (10) (дающих инкременты неустойчивости) так же имеет вид  $f > 0$ .

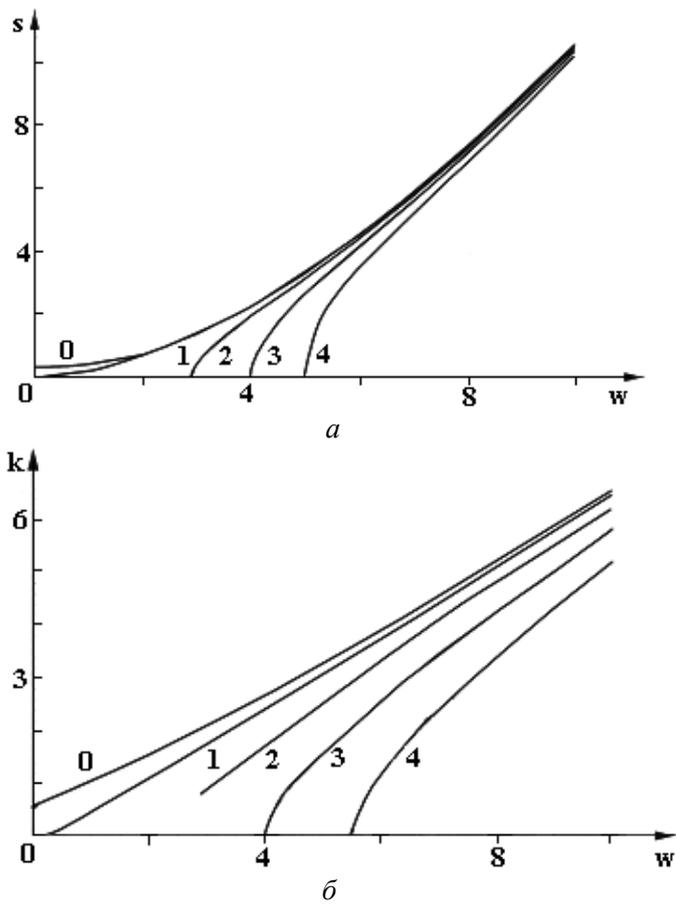


Рис. 1. Зависимости безразмерного инкремента нарастания неустойчивости  $s$  и волнового числа наиболее неустойчивой моды  $k$  от параметра  $w$ , характеризующего безразмерную поверхностную плотность заряда. Номер кривой соответствует номеру азимутального числа  $t = 0, 1, 2, 3, 4$

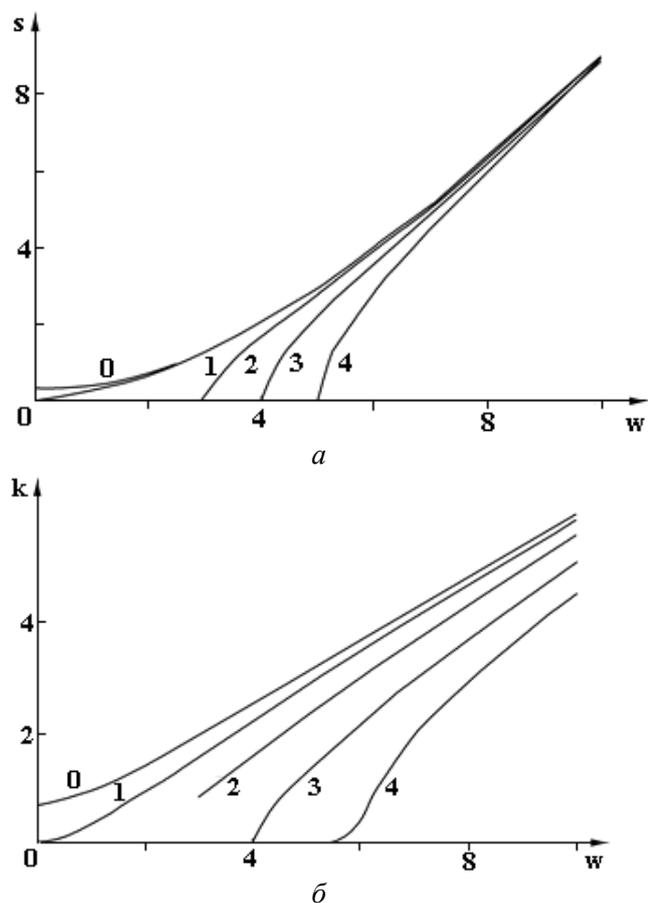


Рис. 2. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, полученные при  $v = 0,5$

В представляющем интерес (при больших значениях поверхностного заряда) диапазоне величин безразмерных волновых чисел  $k \sim (4-6)$  и безразмерных инкрементов неустойчивости  $\sqrt{f} \sim (5-10)$  (см. рис.1,*а,б*) влияние вязкости на развивающуюся неустойчивость будет слабым и проявляется в снижении величин инкрементов и волновых чисел наиболее неустойчивых волн. Это видно из рис.2,*а,б*, где приведены результаты расчетов для  $\nu = 0,5$  в виде зависимостей:  $s = s(w)$ ,  $k = k(w)$  для первых пяти значений азимутального числа  $m$ . Данные рис.2,*а,б* свидетельствуют о том, что учет вязкости, хотя бы и малой, дает преимущество развитию неустойчивости осесимметричных волн.

Таким образом, анализ дисперсионного уравнения показывает, что в спонтанном капиллярном распаде заряженных (поддерживаемых при постоянном потенциале) струй на капли важную роль в формировании спектра распределения образующихся капелек по размерам играет неустойчивость осесимметричных волн.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городков А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М., 1991.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
3. Magarvey R.H., Outhouse L.E. Note on the break up of charged liquid jet // J. Fluid Mech. 1962. V.13. № 1. P.151–157.
4. Huebner A.L. Uber den Zerfall eines Flussigkeitstrahles // J. Fluid Mech. 1969. V.38. № 4. P.679–688.
5. Schneider J., Lindbland C., Hendrics Jr. Stability of electrified liquid jet // J. Appl. Phys. 1967. V.38. № 6. P.2599–2606.
6. Michael D.H., O Neill M.E. Electrohydrodynamic of a cylindrical viscous jet. // Canadian J. Phys. 1969. V.47. P.1215–1220.
7. Grossmann S., Muller A. Instabilities and decay rates of charged viscous liquid jets // Z. Phys. B: Condensed Matter. 1984. V.57. P.161–173.
8. Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. Об устойчивости заряженной струи // ДАН СССР. 1985. Т.283. №1. С.121–125.
9. Гиневский А.Ф. Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости // Сб. науч. тр. МЭИ. №119. М., 1986. С.18–27.
10. Гиневский А.Ф., Мотин А.И. // ИФЖ.1991. Т.60. № 4. С. 576–582.
11. Горшков В.Н., Чабан М.Г. Нелинейные электрогидродинамические явления и генерация капель в заряженных проводящих струях жидкости // ЖТФ.1999. Т. 69. Вып.11. С.1–9.
12. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields // Pros.Roy.Soc. London. 1931. V.133. № A822. P.565–587.
13. Cloupeau M., Prunet-Foch B. Electrostatics spraying of liquids: Main functioning modes // J. Electrostatics. 1990. V.25. P.165–184.
14. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Опыт полуфеноменологической классификации наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкости // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
15. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids // J. Electrostatics. 1995. V. 34. P. 51–59.
16. Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач // Препринт ИМ РАН. №27. Ярославль. 1994.
17. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.

Поступила 8.07.02

## Summary

The problem of disintegration of charged jet of ideal conductive fluid has solved. It has been shown that at a high surface density of a charge optimal conditions of disintegration of the charged jet on drops have the not rotationally symmetric modes.