

В.А. Коромыслов, Е.А. Щерба, А.И. Григорьев

**ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ БЛИЗКО
РАСПОЛОЖЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРОВ В ОДНОРОДНОМ
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. В ряде академических, технических и технологических проблем приходится иметь дело с взаимодействием двух близко расположенных проводящих частиц (капель) во внешнем электростатическом поле [1–4]. Так, например, неустойчивость жидких капель, находящихся в грозовом облаке, сопровождающаяся эмиссией значительного количества заряженных микрокапелек [4], играет важную роль в процессах микроразделения зарядов и в процессе зарождения разряда линейной молнии [5]. Обсуждаемый феномен представляет также интерес в связи с проблемой расчета констант коагуляции в аэродисперсных системах естественного и искусственного происхождения.

Естественно ожидать, что на больших расстояниях поляризованные во внешнем электростатическом поле незаряженные капли электропроводной жидкости (например, воды) будут взаимодействовать как диполи с силой обратно пропорциональной четвертой степени расстояния между центрами [6]. При сближении капель на малые расстояния (характерные для процессов коагуляции) заряды, индуцированные в каплях диполями сближающихся капель, начинают оказывать существенное влияние на взаимодействие, начинает сказываться и неоднородность пространственного распределения поляризованных зарядов. Так, согласно расчетам [7, 8], в случае электропроводных заряженных шаров в отсутствие внешнего электростатического поля, сила взаимодействия между ними заметно отличается от закона Кулона из-за существенного вклада поляризованного взаимодействия.

2. В связи с вышеизложенным решалась задача о нахождении силы взаимодействия двух изолированных заземленных незаряженных идеально проводящих шаров радиусами R_1 и R_2 , находящихся в диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , помещенных во внешнее однородное электростатическое поле \vec{E}_0 , параллельное оси симметрии OZ , проходящей через центры шаров. Расстояние между центрами шаров равно h (см. рис.1).

Величина силы взаимодействия шаров легко вычисляется в виде [1]:

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_z = \frac{\epsilon}{8\pi} \oint_{S_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \vec{n}_z \cdot \vec{n}_j \, dS_j, \quad (1)$$

где \vec{n}_z – орт оси OZ , \vec{n}_j – нормаль к элементу поверхности j -го шара dS_j , $\Phi = \Psi + \Phi_0$ – потенциал суммарного электростатического поля, Ψ – потенциал, создаваемый зарядами, индуцированными на поверхности шаров, Φ_0 – потенциал внешнего однородного электростатического поля.

Таким образом, задача сводится к нахождению потенциала Φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0; \quad (2)$$

и граничным условиям

$$r = R_j: \Phi = 0; \quad (j = 1, 2); \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \vec{E} \rightarrow \vec{E}_0. \quad (4)$$

R_j – радиус j -го шара.

Аналитическое решение данной задачи целесообразно искать в бисферической системе координат μ , η и φ [9, 10]. Тогда решение уравнения (2) с учетом (3), (4) имеет вид:

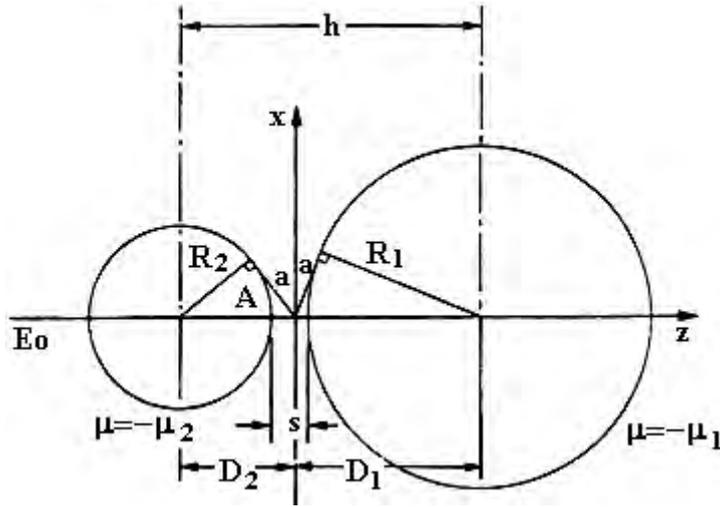


Рис.1. Система двух шаров радиусами R_1 и R_2 в однородном электростатическом поле \vec{E}_0 , направленном вдоль оси OZ

$$\Phi = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \exp \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] + B_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] \right) P_n(\cos \eta) - a \sqrt{2(\cosh \mu - \cos \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) |\mu| \right] P_n(\cos \eta); \quad (5)$$

где коэффициенты разложения A_n и B_n определяются выражениями

$$A_n = \frac{\sqrt{2}a(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_2] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1};$$

$$B_n = -\frac{\sqrt{2}a(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_1] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1}. \quad (6)$$

Чтобы описать взаимодействие шаров, достаточно найти силу, действующую на один из шаров, тогда сила, действующая на второй шар, определяется из третьего закона Ньютона. Подставляя в выражение для силы (1) решение (5), (6) и обезразмеривая полученное соотношение на $R_2^2 E_0^2 \varepsilon$, для силы, действующей на второй шар, получим следующее выражение:

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{(\gamma + r + 1)^2 - \gamma^2 + 1}{2(\gamma + r + 1)} \right]^2 - 1 \right\} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} Y_n \left[Y_n - \frac{1}{2} \left(G + \frac{1}{G} \right) \left(\frac{n+1}{2n+3} Y_{n+1} + \frac{n}{2n-1} Y_{n-1} \right) \right], \quad (7)$$

где использованы обозначения

$$Y_n = \sqrt{2}(2n+1)G^{(n+1/2)} \left[\frac{(2n+1)(H^{(2n+1)} + 1)}{H^{(2n+1)}G^{(2n+1)} - 1} \right]; \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{(\gamma + r + 1)^2 + \gamma^2 - 1}{2(\gamma + r + 1)} \right] + \left(\left[\frac{(\gamma + r + 1)^2 - \gamma^2 + 1}{2(\gamma + r + 1)} \right]^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (9)$$

$$G = \frac{I}{\gamma} \left\{ \left[\frac{(\gamma + r + I)^2 - \gamma^2 + I}{2(\gamma + r + I)} \right] + \left(\left[\frac{(\gamma + r + I)^2 - \gamma^2 + I}{2(\gamma + r + I)} \right]^2 - I \right)^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (10)$$

$$\gamma = R_1/R_2; \quad r = s/R_2; \quad (11)$$

s – расстояние между ближайшими точками шаров на оси симметрии (см. рис.1).

3. Результаты численного анализа полученных выражений представлены на рис.2 в виде зависимости силы взаимодействия шаров f , определяемой выражением (7) с учетом (8)–(11), от отношения их радиусов γ и безразмерного расстояния между центрами шаров r . Анализ приведенной зависимости показал, что при любых значениях r шары притягиваются. Однако при уменьшении r сила притяжения между шарами растет весьма медленно: примерно $F \sim r^n$, где $n \approx 1$, тогда как для электростатически взаимодействующих элементарных диполей зависимость была бы гораздо более сильной: $n = 4$.

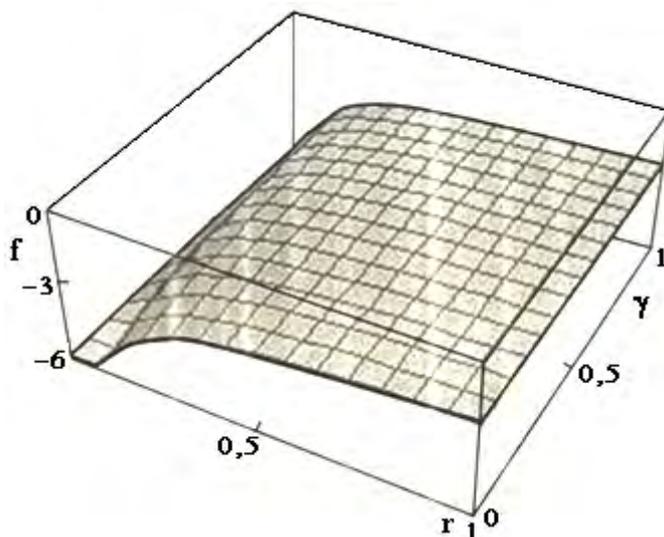


Рис.2. Зависимость безразмерной силы f , действующей на один из шаров, от отношения радиусов шаров γ и безразмерного расстояния r между шарами

Давление электрического поля на поверхности шаров достигает максимума в точках поверхностей, лежащих на оси симметрии, напротив друг друга. В реальной ситуации, например, для капель воды в грозовом облаке возможны две ситуации: если в областях с наибольшей поверхностной плотностью индуцированного заряда давление электрического поля превысит лапласовское, то капли выбросят навстречу друг другу струйки высокодисперсных сильнозаряженных дочерних капелек, а большие капли приобретут при этом нескомпенсированные заряды противоположного знака; в противном случае, если лапласовское давление в любой точке превышает давление электрического поля, то капли сольются в одну.

4. Заключение. Два изолированных заземленных незаряженных идеально проводящих шара различных радиусов во внешнем однородном электростатическом поле, коллинеарном оси симметрии, всегда притягиваются, однако зависимость силы притяжения от расстояния между центрами шаров заметно более слабая, чем для ситуации взаимодействия двух элементарных диполей. Таким образом, сближение капель электропроводной жидкости вдоль оси симметрии внешнего электростатического поля приведет либо к их слиянию, либо – выбросу навстречу друг другу струек высокодисперсных сильнозаряженных дочерних капелек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M.H. Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1964. V.176. N. 4. P. 499–511.
2. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.

3. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Механизм развития ступенчатого лидера и внутриоблачного ветвления линейной молнии // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–14.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., 1954.
7. Саранин В.А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров // УФН. 1999. Т.169. N 4. С. 453–458.
8. Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. О взаимодействии двух заряженных проводящих шаров при малых расстояниях между ними // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 15–19.
9. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., 1961.
10. Панченков Г.М., Цабек Л.К. Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М, 1969.

Поступила 8.05.02

Summary

The electrostatic interaction of two isolated earthed uncharged ideally conductive spheres of different radiuses placed in an uniform electric field is investigated. It have been shown that dependence of their polarization interaction forces on distance between centers at small distances much more weak compare to electrostatic interaction of two infinitesimal dipoles.

Т.В. Левчук, М.В. Рыбакова, С.О. Ширяева

О СПОНТАННОМ РАСПАДЕ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский государственный университет им. Демидова.
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Капиллярный распад заряженных струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в различных направлениях техники и химической технологии [1, 2]. Поэтому неоднократно исследовался экспериментально [3, 4] и теоретически [5–11]; тем не менее, некоторые его аспекты остаются неясными. Сказанное относится, в частности, к изучению закономерностей реализации спонтанного распада осесимметричных струй. До сих пор все задачи по диспергированию струй теоретически рассматривались в основном для осесимметричного случая, хотя в реальности чаще всего приходится иметь дело с неосесимметричными струями. В экспериментальных работах [3, 4] подтверждается увеличение влияния осесимметричного распада с ростом величины подаваемого на струю электрического потенциала. В ряде статей подробно исследован распад во внешнем электростатическом поле свободно падающих заряженных капель, диспергирование которых связано с выбросом и распадом струй. Например, в [12] зафиксирован выброс с противоположных вершин капли вдоль направления внешнего электростатического поля струй жидкости, распадающихся на отдельные дочерние капельки осесимметричным образом. При экспериментальном исследовании электростатического распыления жидкости с торца капилляра также наблюдается выброс с вершины мениска жидкости на торце капилляра тонких струек жидкости, распадающихся осесимметричным образом на дочерние капельки [13]. Наличие осесимметричного распада струй жидкости в экспериментах приводит к большому разнообразию наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкости [14, 15]. Поэтому целью этой работы является исследование особенностей реализации неустойчивости осесимметричных заряженных струй электропроводной жидкости.