

Излучение электромагнитных волн осциллирующей заряженной капли

А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Найдены аналитические выражения для напряженности электрического поля в окрестности осциллирующей заряженной капли невязкой электропроводной жидкости и интенсивности электромагнитного излучения от нее в линейном по амплитуде возмущения приближении. Проведены оценки по порядку величины.

Ключевые слова: сферическая капля, электрический заряд, осцилляции, излучение, электромагнитные волны.

УДК 532.62:538.3

ВВЕДЕНИЕ

Наличие электромагнитного излучения от осциллирующих заряженных облачных и дождевых капель представляет интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [1–7]. Сама проблема расчета интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся заряженной капли в линейном по амплитуде осцилляций приближении была сформулирована в [5], там же были приведены первые оценки применительно к облакам. Идеи [5] были развиты в [6–7]. В [8], однако, было отмечено, что в [5] соответственно и в [6–7] при расчете интенсивности радиоизлучения от осциллирующей капли допущены ошибки: взята неверная асимптотика для функций Ханкеля. В итоге расчетная интенсивность радиоизлучения получилась существенно завышенной. Важность обсуждаемой задачи приводит к необходимости развития теоретических представлений, а также существенной корректировки полученных в [5–7] оценок. Наблюдение проведем по схеме, использованной в [6–7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть несущая заряд Q сферическая капля радиуса R невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ находится в невязкой несжимаемой среде с проницаемостью ϵ_{ex} и плотностью ρ_2 .

Примем, что в жидкости из-за теплового движения молекул [9] генерируется капиллярное волновое движение весьма малой (тепловой) амплитуды с характерной высотой гребней $\xi \sim \sqrt{kT/\sigma}$, где $k = 8,31 \cdot 10^7$ эрг/(моль \cdot °К) – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [9]. При температурах порядка комнатной

тепловая амплитуда волн для всех жидкостей меньше ангстрема. Это волновое движение практически бесконечно малой амплитуды формирует искажение равновесной сферической формы капли $\xi(\theta, \varphi, t)$. Причем $\max |\xi(\theta, \varphi, t)| \ll R$.

Будем решать задачу в сферической системе координат с началом в центре масс капли, ограничиваясь рассмотрением осесимметричных осцилляций. Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли можно записать в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t),$$

где $\xi(\theta, t)$ – волновое возмущение поверхности капли.

Движение жидкости в капле и среде будем полагать потенциальным. Примем, что поля скоростей движения жидкости $\vec{V}_j(\vec{r}, t)$ (где значение индекса $j = 1$ относится к капле, а $j = 2$ – к среде) полностью определяются функциями гидродинамических потенциалов $\psi_j(\vec{r}, t)$:

$$\vec{V}_j(\vec{r}, t) = \nabla \psi_j(\vec{r}, t).$$

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\Delta \psi_j(\vec{r}, t) = 0;$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}; \quad \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \psi_2(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$P_j(\vec{r}, t) = P_{j0}(\vec{r}) - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t};$$

$$r = R + \xi: \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial n};$$

$$\frac{\partial \psi_1(\vec{r}, t)}{\partial n_1} = \frac{\partial \psi_2(\vec{r}, t)}{\partial n_2} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial n}; \quad (1)$$

$$\Delta P_0 - \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{8\pi \epsilon_{ex}} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 -$$

$$- \sigma \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2} (2 + \hat{L}) \xi \right) = 0;$$

$$(\vec{\tau}, \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0.$$

Здесь $P_j(\vec{r}, t)$ – гидродинамическое давление в жидкости и среде; P_{j0} – константы интегрирования, ΔP_0 – перепад давлений; $\vec{E}(\vec{r}, t)$ – напряженность электрического поля собственного заряда; $\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах, $\vec{\tau}$ – орт касательной к возмущенной поверхности капли. В качестве малого параметра примем отношение амплитуды волнового возмущения равновесной поверхности капли к радиусу капли; \vec{n}_1 и \vec{n}_2 – единичные векторы нормалей на границе раздела, внешние по отношению к капле и среде соответственно. Будем считать, что в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, величины полей скоростей течения жидкостей, вызванных колебаниями поверхности, имеют тот же порядок малости. Орт нормали к поверхности капли \vec{n} с точностью до малых первого порядка определяется выражением:

$$\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|_{F=0} = \left(\vec{e}_r - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(\theta, t) \right);$$

$$F(\theta, t) = r - R - \xi(\theta, t) = 0,$$

где \vec{e}_r и \vec{e}_θ – орты сферической системы координат.

Для замыкания выписанной системы введем условия неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс при осцилляциях, а также условие сохранения заряда капли:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R+\xi(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

$$\int_0^\pi \vec{r} \cdot (R + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\vec{n}, \vec{E}) \cdot (R + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_{ex}}.$$

Производные в граничных условиях в линейном по $|\xi|/R$ приближении отнесем к невозму-

щенной поверхности капли $r = R$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды.

2. РЕШЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Представим возмущение равновесной сферической поверхности капли $\xi(\theta, t)$, связанное с капиллярным волновым движением, в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t); \quad \mu \equiv \cos \theta,$$

где ω_n – частота капиллярных осцилляций n -й моды, в общем случае комплексная; α_n – начальная амплитуда n -й моды осцилляций $\alpha_n \sim \xi(\theta)$.

Аналогично в виде рядов по полиномам Лежандра найдем решения уравнений для гидродинамических потенциалов, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t),$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t). \quad (2)$$

Коэффициенты A_n и B_n являются малыми того же порядка, что и α_n . Связь между коэффициентами A_n , B_n и α_n легко находится из (1) (из кинематического условия и условия равенства нормальных компонент поля скоростей на границе раздела сред) в виде:

$$A_n = -\alpha_n \frac{i\omega_n}{n} R^{1-n}; \quad B_n = \alpha_n \frac{i\omega_n}{(n+1)} R^{n+2}. \quad (3)$$

Для вывода дисперсионного уравнения задачи проинтегрируем динамическое граничное условие по времени (при $\theta = \text{const}$), и с учетом (1) получим:

$$-\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi \epsilon_{ex}} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{\sigma}{R^2} (2 + \hat{L}) \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0.$$

В полученном выражении остается неопределенной частная производная по времени от электрического давления на поверхности капли. Расчет напряженности электрического поля, необходимой для определения давления электрического поля, приведен в «Приложении» (окончательное выражение дает формула (20П)).

На основе полученного выражения (20П) можно найти давление электрического поля на поверхности капли:

$$r = R + \xi(\theta, t): \quad P_E = \frac{\epsilon_{ex}}{8\pi} (\vec{E})^2.$$

Определенное таким образом давление поля относится к возмущенной поверхности капли

$r = R + \xi$. Однако в теории волн бесконечно малой амплитуды в линейном приближении динамическое граничное условие относят к невозмущенной поверхности капли $r = R$. Поэтому разложим полученное выражение в окрестности $r = R$ с точностью до слагаемых первого порядка малости по отношению $|\xi|/R$:

$$P_q \equiv \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} \left(\frac{Q^2}{\varepsilon_{ex}^2 R^4} - 2 \frac{Q^2}{\varepsilon_{ex}^2 R^5} \times \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(-i\omega_n t) (G(kR)n(n+1)+2) P_n(\mu) \right);$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R},$$

где $h_n^{(2)}(kr)$ – вторая модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода [10]. Оператор ∂_r означает взятие производной по аргументу r .

Продифференцировав это выражение по времени (при $\theta = \text{const}$) с учетом (2)–(3) и подставив в динамическое граничное условие, после несложных преобразований получим дисперсионное уравнение задачи в виде:

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times \left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex} R^6} (G(kr)n(n+1)+2) + \frac{\sigma}{R^3} (n-1)(n+2) \right), \quad (4)$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R}.$$

Записывая сферическую функцию Бесселя третьего рода в виде степенного ряда [10]

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}},$$

представим $G(z)$ в следующем виде:

$$G(z) = \frac{h_n^{(2)}(z)}{\partial(zh_n^{(2)}(z))} = \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz)^m}.$$

Если расписать в этом выражении суммы и выделить вещественную и мнимую части, то при малом значении z они будут иметь следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \text{Re}[G_n(z)] &\approx -\frac{1}{n}; \\ \text{Im}[G_n(z)] &\approx \left[\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z^{2n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Комплексную частоту колебаний n -й моды представим как $\omega_n = \text{Re } \omega_n + i \text{Im } \omega_n$, где $\text{Im } \omega_n$ – мнимая часть частоты, которая обусловлена затуханием колебаний из-за излучения электромагнитных волн (иного затухания в идеальной жидкости быть не может) и мала по сравнению с реальной частью ($\text{Im } \omega_n \ll \omega_n'$). С учетом этого в выражении для квадрата частоты колебаний сделаем замену $\omega_n^2 \approx (\text{Re } \omega_n)^2 + 2 \text{Re } \omega_n \text{Im } \omega_n$. Тогда для реальной и мнимой частей частоты (4) при малом значении аргумента $z_0 = kR$ получим:

$$\begin{aligned} (\text{Re } \omega_n)^2 &= \frac{n(n+1)(n-1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times \\ &\times \left(-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex} R^6} + \frac{\sigma}{R^3} (n+2) \right), \\ \text{Im } \omega_n &= \frac{(n+1)^2}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times \\ &\times \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex} R^6} \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 z_0^{2n+1} \frac{1}{2\omega_{n0}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\omega_{n0}^2 = \frac{\sigma n(n+1)(n-1)(n+2)}{R^3 (\rho_2 n + (n+1)\rho_1)}$ – частоты соб-

ственных колебаний незаряженной сферы в материальной среде.

Учитывая в (6), что $z_0 = \frac{\omega_{n0}}{c} R$, и подставляя выражение для частоты собственных колебаний, получим мнимую часть частоты колебаний в виде:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega_n &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_{ex}} \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \times \\ &\times \frac{(n+1)^{n+2} (n(n-1)(n+2))^n}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^{n+1}} \frac{\sigma^n}{c^{2n+1} R^{n+5}}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Мнимая часть $\text{Im } \omega_n$ частоты колебаний (7) определяет декремент затухания капиллярных волн η . Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_{ex}} \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \times \\ &\times \frac{(n+1)^{n+2} (n(n-1)(n+2))^n}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^{n+1}} \frac{\sigma^n}{c^{2n+1} R^{n+5}}. \end{aligned}$$

Поскольку жидкость принимается идеальной и механического трения нет, то появление декремента может быть связано только с потерями энергии на излучение электромагнитных волн (см. [5–6]).

Выражение для мощности излучения на частоте ω_n запишем в виде [5]:

$$I = -\frac{d\mathcal{G}_n}{dt} \equiv \eta \mathcal{G}_n,$$

где \mathcal{G}_n – энергия поверхностных колебаний n -й моды, которую можно на основе теоремы вириала представить как удвоенную среднюю за период движения жидкости в капле, связанную с n -й модой:

$$\mathcal{G}_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \omega_n^2 \alpha_n^2}{n(2n+1)}.$$

В итоге запишем окончательное выражение для интенсивности электромагнитного излучения от единичной колеблющейся заряженной капли идеальной жидкости:

$$I = \frac{1}{4} \frac{Q^2}{\varepsilon_{ex}} \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \times \frac{n^n (n+1)^{n+3} ((n-1)(n+2))^{n+1} \rho_1 \sigma^{n+1}}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^{n+2} (2n+1) c^{2n+1} R^{n+5} \alpha_n^2}. \quad (8)$$

Несложно представить из (8), что интенсивность излучения убывает с ростом номера моды, так как квадрат факториала, стоящий в знаменателе, растет с увеличением n быстрее, чем степенная зависимость, стоящая в числителе.

Первый возможный источник электромагнитного излучения связан с осцилляциями мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 мкм. Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ [11]. Осцилляции облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате столкнувшихся процессов или реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [1–3], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. Иными словами, отношение (α_n/R) можно принимать не зависящим от радиуса и имеющим величину порядка десятых долей единицы. При нижеследующих оценках будем принимать это отношение равным 0,1. Величина параметра W для капель в имеющихся в облаках электростатических полях, согласно [12], много меньше единицы, то есть большая часть облачных капель находится весьма далеко от предела неустойчи-

вости по отношению к поляризованному заряду. В итоге при $\rho_1 \gg \rho_2$ интенсивность электромагнитного излучения от осциллирующей облачной капли наиболее сильно зависит от номера моды n реализующихся осцилляций и их относительной амплитуды. Для численных оценок примем $\varepsilon_{ex} = 1$, $n = 2$, $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $\alpha_n = 0,1R$, $R = 30 \text{ мкм}$, $Q = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ CGSE}$. Тогда из (8) несложно получить $I \sim 2 \cdot 10^{-48} \text{ мВт}$ на частоте $\approx 100 \text{ кГц}$. Для капли радиусом $R = 8 \text{ мкм}$ получим значение интенсивности $I \sim 1 \cdot 10^{-45} \text{ мВт}$ на частоте $\approx 1 \text{ МГц}$. При радиусе капли $R = 3 \text{ мкм}$ излучение составляет $I \sim 2 \cdot 10^{-43} \text{ мВт}$ на частоте $\approx 4,5 \text{ МГц}$ (см. рис. 1). Из проведенных оценок и рис. 1 видно, что с увеличением радиуса капли на порядок интенсивность излучения убывает на пять порядков величины. Наибольший вклад в излучение от облака дадут капли мелких размеров.

Интегральная интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром 5 км будет уже значительной: $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-28} \text{ мВт}$, если принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый размер $R = 30 \text{ мкм}$. Интегральная интенсивность $I_{in} \sim 9 \cdot 10^{-26} \text{ Вт}$ при радиусе $R = 8 \text{ мкм}$ и $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-23} \text{ мВт}$ для капель радиусом $R = 3 \text{ мкм}$ (рис. 2). В проведенной оценке мы принимали, что осцилляции всех капель связаны с основной модой.

На рис. 3 и 4 приведены характеристики излучения в зависимости от заряда осциллирующей капли, рассчитанные для капель разных размеров. Видно, что с увеличением заряда интенсивность излучения быстро увеличивается. При увеличении заряда в 4 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок.

На рис. 5 приведены зависимости частоты излучения (частоты осцилляций капли) от радиуса капли. Видно, что с увеличением размера капли частота излучения быстро снижается.

Второй возможный источник электромагнитного излучения связан, согласно [5], со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и поэтому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Однако в [5] на роль излучающих гидрометеоров предлагались заряженные капли радиуса $R = 1 \text{ мм}$, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [11], весьма мала: $\sim 1 \text{ м}^{-3}$. В итоге оценки интенсивности электромагнитного излучения из облака, основанные на обсуждаемом механизме, проведенные для экстремальных численных зна-

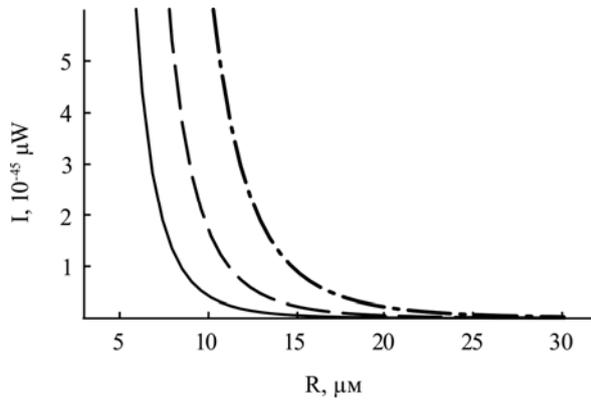


Рис. 1. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от радиуса сферической капли, рассчитанные при $\epsilon_{ex} = 1$, $n = 2$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\alpha_n = 0,1 \cdot R$. Сплошная линия соответствует $Q = 8,3 \cdot 10^{-10}$ μC, пунктирная линия – $Q = 1,6 \cdot 10^{-9}$ μC, штрихпунктирная линия – $Q = 3,3 \cdot 10^{-9}$ μC.

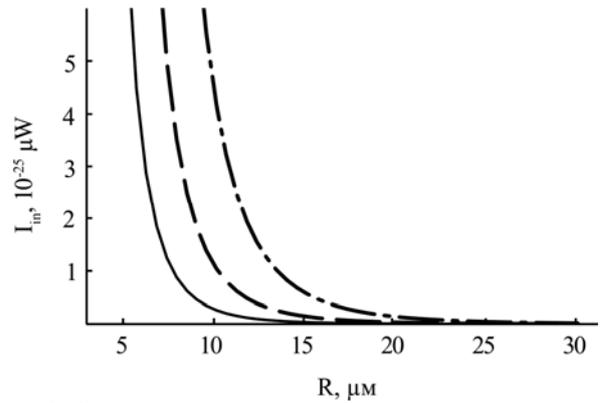


Рис. 2. Зависимости интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 5 км от радиуса единичной заряженной сферической капли, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1. Сплошная линия соответствует $Q = 8,3 \cdot 10^{-10}$ μC, пунктирная линия – $Q = 1,6 \cdot 10^{-9}$ μC, штрихпунктирная линия – $Q = 3,3 \cdot 10^{-9}$ μC.

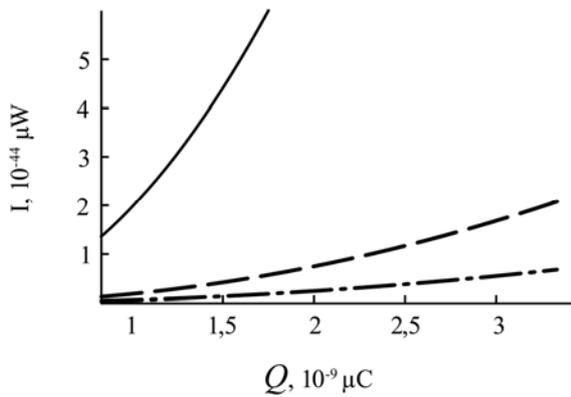


Рис. 3. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от её заряда, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1. Сплошная линия соответствует $R = 5$ мкм, пунктирная линия – $R = 8$ мкм, штрихпунктирная линия – $R = 10$ мкм.

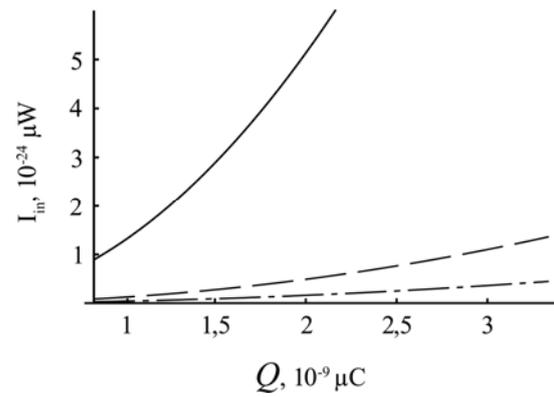


Рис. 4. Зависимости интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 5 км от напряженности электростатического поля, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1. Сплошная линия соответствует $R = 5$ мкм, пунктирная линия – $R = 8$ мкм, штрихпунктирная линия – $R = 10$ мкм.

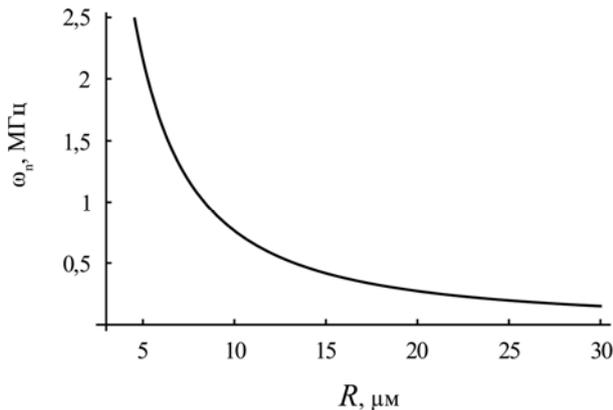


Рис. 5. Зависимости частоты электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от радиуса сферической капли, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, $Q = 8,3 \cdot 10^{-10}$ μC.

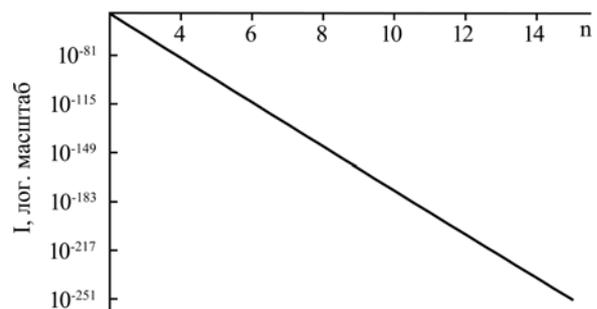


Рис. 6. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от номера моды, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, $R = 100$ мкм, $Q = 1,6 \cdot 10^{-7}$ μC.

чений зарядов и концентраций капель с $R = 1$ мм, по всей видимости, существенно завышены. Тем не менее сам механизм, предложенный в [5], несомненно должен работать, если в его основу положить на порядок более мелкие капли с $R = 100$ мкм, концентрация которых в облаке,

согласно данным наблюдений [11], достаточно высока: $\sim 10^3$ м⁻³, а скорость их свободного падения имеет величину ≈ 78 см/с. При такой скорости падения сквозь облако капель с радиусами от 3 до 30 мкм с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон от 3 до 7 мкм, гид-

рометеор будет испытывать ежесекундно около 22 столкновений, при которых в нем будут возбуждаться моды с $n \in \{2 \div 30\}$. Принимая для оценки $\alpha_n = 0,1R$ [1–3], $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ CGSE и $n = 15$, несложно оценить по (8) интенсивность электромагнитного излучения единичного гидрометеора: $I \sim 4 \cdot 10^{-246} \mu W$, частота которого будет около 510 кГц. Столь малая интенсивность излучения связана с высоким номером моды, возбуждающейся при столкновении гидрометеора с облачными каплями, принятыми при оценках. Зависимость интенсивности излучения от номера возбуждающейся моды осцилляций приведена на рис. 6. Видно, что она быстро уменьшается с ростом номера моды. В расчетах показано, что с увеличением номера моды на единицу мощность излучения уменьшается по порядку на $\sim 10^{-15}$ и на высоких модах интенсивность излучения еще более незначительна. Зависимость частоты генерируемого излучения от номера моды при этом иллюстрируется рис. 7.

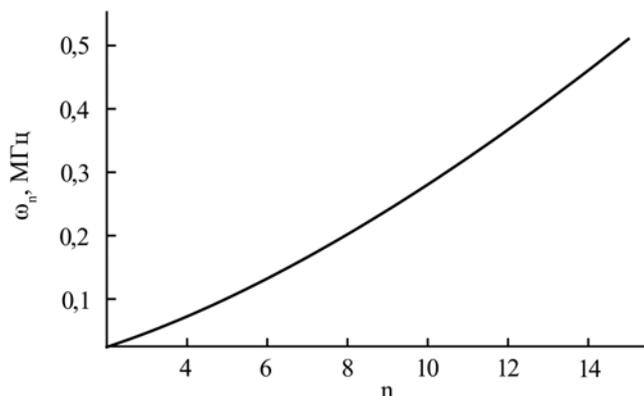


Рис. 7. Зависимости частоты электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от номера моды, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, $R = 100$ мкм, $Q = 1,6 \cdot 10^{-7} \mu C$.

Интегральную интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 5 км легко найти: $I_{in} \sim 3 \cdot 10^{-226} \mu W$. Зависимости интенсивности излучения от радиуса капли и величины напряженности электростатического поля аналогичны приведенным на рис. 1–4. Очевидно, что такая интенсивность излучения слишком мала для регистрации радиолокационными средствами [4]. Таким образом, из двух вышерассмотренных возможных источников электромагнитного излучения осциллирующих капель в грозовом облаке первый, связанный с осцилляциями низких мод мелких капелек, имеет большую интенсивность, чем второй, связанный с осцилляциями высоких мод крупных капель, свободно падающих в облаке в поле сил тяжести (гидрометеоров), и крайне слабый. Однако в обоих случаях интенсивность линейного излучения мала, и

нельзя объяснить наблюдаемое [4] электромагнитное излучение грозовых облаков. Нелинейные расчеты [13, 14] дают более адекватную наблюдаемым значениям оценку, но они должны быть уточнены.

Все проведенные оценки относятся к идеально проводящей жидкости, поэтому существенно завышены (по крайней мере, для воды). Для получения более реалистичных оценок следует учитывать конечную проводимость реальных жидкостей [15]. Такая проблема подразумевает решение задачи для вязкой жидкости, поскольку лишь в этом случае можно компенсировать возникающие из-за релаксации заряда касательные напряжения на границе раздела сред.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электромагнитное излучение заряженных облаков естественного происхождения можно лишь частично объяснить излучением в линейном по амплитудам мод приближении капиллярными колебаниями капель, составляющих облако, поэтому должны быть проведены оценки интенсивности излучения при нелинейных осцилляциях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ У ПОВЕРХНОСТИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

Для нахождения электрического поля, создаваемого во внешней среде заряженной проводящей сферической каплей, поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением, необходимо решить систему уравнений, содержащую условие неразрывности электрического поля, и волновое уравнение, которые имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (1П)$$

с граничными условиями

$$r \rightarrow \infty: \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r = R + \xi(\theta, t): (\vec{\tau}, \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0;$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \vec{E}^{(1)}) dS = \frac{Q}{\epsilon_{ex}}.$$

Найдем решения уравнений (1П) в сферических координатах с началом в центре масс капли в виде суперпозиции

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(0)}(r) + \vec{E}^{(1)}(r, \theta, t),$$

где $\vec{E}^{(0)}(r)$ – напряженность электрического поля в окрестности невозмущенной сферы, $\vec{E}^{(1)}(r, \theta, t)$ – добавка к напряженности поля,

вызванная капиллярными колебаниями поверхности капли, имеющая тот же порядок малости, что и возмущение поверхности $\vec{E}^{(1)} \sim |\xi|$.

В силу линейности уравнений (1П) векторы $\vec{E}^{(0)}$ и $\vec{E}^{(1)}$ будут решениями систем уравнений, аналогичных (1П).

Решение задачи нулевого приближения не представляет трудности и хорошо известно. Оно выглядит как

$$\vec{E}^{(0)} \equiv \frac{Q}{\varepsilon_{ex} r^2} \vec{e}_r.$$

Для отыскания напряженности поля в первом приближении $\vec{E}^{(1)}$ необходимо решить систему уравнений, содержащую условие неразрывности электрического поля, и волновое уравнение, которые имеют вид, аналогичный (1).

С граничными условиями

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: \vec{E}^{(1)} &\rightarrow 0, \\ r = R + \xi(\theta, t): (\vec{\tau}, \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)) &= 0; \\ \oint_S (\vec{n}, \vec{E}^{(1)}) dS &= 0. \end{aligned}$$

Представим вектор $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$ в виде разложения на три ортогональных вектора [16]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) &= \hat{N}_1 \Phi_1(\vec{r}, t) + \\ &+ \hat{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) + \hat{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (2П)$$

где $\Phi_j(\vec{r}, t)$ – неизвестные скалярные функции, а векторные операторы-проекторы \hat{N}_j имеют вид [16]:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 &\equiv \nabla, \quad \hat{N}_2 \equiv \nabla \times \vec{r}, \quad \hat{N}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r}), \\ \hat{N}_1^+ &\equiv -\nabla, \quad \hat{N}_2^+ \equiv \vec{r} \times \nabla, \quad \hat{N}_3^+ \equiv (\vec{r} \times \nabla) \times \nabla \end{aligned}$$

и удовлетворяют условиям ортогональности

$$(\hat{N}_j^+, \hat{N}_m), \quad m \neq j, \quad (3П)$$

верхний символ “+” означает эрмитово сопряжение.

С учетом свойства (3П) уравнение неразрывности для $\vec{E}^{(1)}$ преобразуется в уравнение Лапласа для функции $\Phi_1(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} (\nabla, \vec{E}^{(1)}) &= (-\hat{N}_1^+, \vec{E}^{(1)}) = \\ &= (-\hat{N}_1^+, (\hat{N}_1 \Phi_1 + \hat{N}_2 \Phi_2 + \hat{N}_3 \Phi_3)) = \\ &= (-\hat{N}_1^+, \hat{N}_1 \Phi_1) \equiv (\nabla, \nabla \Phi_1) \equiv \Delta \Phi_1 = 0. \end{aligned} \quad (4П)$$

Несложно убедиться, что операторы \hat{N}_j коммутируют с оператором Лапласа, то есть $\hat{N}_j \Delta = \Delta \hat{N}_j$, благодаря чему векторное волновое уравнение для $\vec{E}^{(1)}$ преобразуется в систему трех

скалярных уравнений для $\Phi_j(\vec{r}, t)$. Подставим разложение (2П) в волновое уравнение для $\vec{E}^{(1)}$ и, пользуясь свойством коммутативности, приведем его к виду:

$$\sum_{j=1}^3 \hat{N}_j \left[\Delta \Phi_j(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Умножая полученное слева выражение последовательно на \hat{N}_j^+ и учитывая, что $(\hat{N}_j^+, \hat{N}_j) \neq 0$, получим три скалярных волновых уравнения для $\Phi_j(\vec{r}, t)$:

$$\Delta \Phi_j(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5П)$$

Поскольку решается задача об излучении каплей электромагнитных волн, естественно принять $\Phi \sim \exp(-i\omega_n t)$, где i – мнимая единица. При этом уравнения (5П) сведутся к уравнениям Гельмгольца.

Из уравнения (5П) при значении индекса $j = 1$ и уравнения (4П) получим $(\omega_n^2 / \tilde{n}^2) \Phi_1(\vec{r}, t) = 0$, и поскольку частота колебаний отлична от нуля, то, следовательно, скалярная функция $\Phi_1(\vec{r}, t) \equiv 0$. Таким образом, напряженность электрического поля $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$, создаваемого колебаниями поверхности незаряженной капли, будет чисто вихревой и запишется следующим выражением:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = \hat{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) + \hat{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t).$$

В сферической системе координат компоненты $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{N}_2 \Phi_2(\vec{r}, t) &= 0 \vec{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta - \\ &- \frac{\partial \Phi_2(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (6П)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_3 \Phi_3(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_3(\vec{r}, t) \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (7П)$$

Функции $\Phi_2(\vec{r}, t)$ и $\Phi_3(\vec{r}, t)$ являются решениями уравнений Гельмгольца, имеющих вид:

$$\Delta \Phi_q(\vec{r}, t) - \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_q(\vec{r}, t) = 0, \quad q = 2, 3. \quad (8П)$$

В силу того что рассматривается осесимметричная задача, в выражениях (6П) и (7П) следует отбросить слагаемые, содержащие производные по φ , тогда получим:

$$\begin{aligned}\hat{N}_2\Phi_2(\vec{r},t) &= -\frac{\partial\Phi_2(\vec{r},t)}{\partial\theta}\vec{e}_\varphi, \\ \hat{N}_3\Phi_3(\vec{r},t) &= -\frac{1}{r}\hat{L}\Phi_3(\vec{r},t)\vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Phi_3(\vec{r},t)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta.\end{aligned}\quad (9\Pi)$$

Решение уравнений (8\Pi) для функций $\Phi_q(\vec{r},t)$ запишется в виде:

$$\Phi_q = \sum_n D_n^{(q)} h_n^{(2)}(kr) \exp(-i\omega_n t) P_n(\cos\theta), \quad (10\Pi)$$

где $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода, выбираемая из тех соображений, чтобы в асимптотике ($r \rightarrow \infty$) электромагнитная волна расходилась; $k = (\omega_n/c)$ – волновое число; c – скорость света.

Неизвестные константы $D_n^{(q)}$ в решениях (10\Pi) определяются из граничных условий эквипотенциальности поверхности капли и неизменности её заряда. Заметим, что для тороидальной компоненты поля $\vec{E}^{(1)}(\vec{r},t)$, определяемой функцией $\Phi_2(\vec{r},t)$, эти граничные условия приведут к следующим соотношениям:

$$r(\theta,t) = R + \xi(\theta,t): \left(\hat{N}_2\Phi_2(\vec{r},t), \vec{\tau} \right) = 0, \quad (11\Pi)$$

$$\oint_S \left(\hat{N}_2\Phi_2(\vec{r},t), \vec{n} \right) \cdot dS = 0, \quad (12\Pi)$$

где $\vec{\tau}$ и \vec{n} – единичные векторы касательной и нормали к поверхности капли.

Выражения (11\Pi) и (12\Pi) нужно брать на поверхности капли при $r = R$. При этом вектором $\vec{\tau}$ могут служить орты сферической системы координат \vec{e}_θ и \vec{e}_φ , а вектор нормали \vec{n} будет совпадать с ортом \vec{e}_r .

Согласно (9\Pi), тороидальная компонента поля $\left(\hat{N}_2\Phi_2(\vec{r},t) \right)$ имеет лишь составляющую $\sim \vec{e}_\varphi$, и, значит, соотношения (11\Pi) и (12\Pi) при $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$ удовлетворяются тождественно при любых константах $D_n^{(2)}$ в решении (10\Pi). Из условия (11\Pi) при $\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$ получим:

$$r = R: \frac{\partial\Phi_2(\vec{r},t)}{\partial\theta} = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым при любом значении угла θ , то необходимо потребовать обращения в нуль всех констант $D_n^{(2)}$ в решении для $\Phi_2(\vec{r},t)$. Таким образом, поле $\vec{E}^{(1)}(\vec{r},t)$ полностью определяется скалярной функцией $\Phi_3(\vec{r},t)$:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r},t) = \hat{N}_3\Phi_3(\vec{r},t) \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r})\Phi_3(\vec{r},t)$$

или с учетом (10\Pi) получим:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(1)}(\vec{r},t) &= \sum_n \exp(-i\omega_n t) \times \\ &\times \left\{ D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ &\left. + \left(D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) + D_n^{(3)} \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\}.\end{aligned}\quad (13\Pi)$$

Для определения неизвестной константы $D_n^{(3)}$ учтем, что поверхность проводящей капли эквипотенциальна, то есть проекция вектора \vec{E} на орт касательной к поверхности $\vec{\tau}$ есть нуль:

$$\left(\vec{\tau}, \vec{E}(\vec{r},t) \right) = 0. \quad (14\Pi)$$

Чтобы найти орт $\vec{\tau}$, сначала запишем орт нормали к возмущенной поверхности капли:

$$\vec{n} = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(\theta,t) \vec{e}_\theta. \quad (15\Pi)$$

В силу осевой симметрии задачи орт касательной к параллелям совпадает с соответствующим ортом сферической системы координат $\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_\varphi$. Орт касательной в меридиональном направлении найдем, воспользовавшись векторным соотношением:

$$\vec{\tau}_\theta = \vec{n} \times \vec{\tau}_\varphi.$$

С учетом (15\Pi) выражение для орта касательной запишется в виде:

$$\vec{\tau}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta,t)}{\partial \theta} \vec{e}_r - \vec{e}_\theta. \quad (16\Pi)$$

Подставив (16\Pi) и (13\Pi) в (14\Pi), перепишем условие эквипотенциальности проводящей капли в виде:

$$E_r^{(0)} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta,t)}{\partial \theta} + E_\theta^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = 0, \quad (17\Pi)$$

где $E_r^{(0)}$ и $E_\theta^{(1)}$ – компоненты векторов напряженности поля нулевого и первого порядка малости.

Подстановка выражений для $E_\theta^{(1)}$ из (13\Pi), $E_r^{(0)} \equiv E^{(0)}$ и возмущения поверхности капли $\xi(\theta,t)$ в виде ряда по полиномам Лежандра в выражение (17\Pi) позволяет определить выражение для константы $D_n^{(3)}$ через амплитуду α_n :

$$D_n^{(3)} = -\alpha_n \frac{Q}{\epsilon_{ex} R^2} \frac{1}{\partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}. \quad (18\Pi)$$

Подставив (18\Pi) в (13\Pi), получим выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}^{(1)}(\vec{r},t)$:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \times \right. \\ \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \frac{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \vec{e}_\theta \right\}. \quad (19\Pi)$$

В итоге полная напряженность электрического поля, создаваемая каплей, запишется в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{\varepsilon_{ex} r^2} \vec{e}_r - \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \times \right. \\ \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \frac{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \vec{e}_\theta \right\}. \quad (20\Pi)$$

В частности, электрическое поле первого порядка малости $\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t)$, создаваемое каплей, колеблющейся на основной моде ($n = 2$) с частотой ω_2 , примет следующий вид:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = -\alpha_2 \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2 r} \exp(-i\omega_2 t) \left\{ 6 \frac{h_2^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_2^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} P_2(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ \left. + \frac{\partial_r (rh_2^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_2^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial r} \vec{e}_\theta \right\}. \quad (21\Pi)$$

Авторы выражают благодарность Н.А. Богатову, указавшему на ошибки, допущенные при нахождении асимптотик сферических функций Бесселя третьего рода в [5–6].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beard Kenneth V., Tokay Ali. A Field Study of Small Raindrop Oscillation. *Geophys Res Lett.* 1991, **18**(12), 2257–2260.
2. Beard Kenneth V. Cloud and Precipitation Physics Research 1983–1986. *Reviews of Geophysics.* 1987, **25**(3), 357–370.
3. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков. *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1988, **24**(6), 613–621.
4. Качурин Л.Г. *Физические основы воздействия на атмосферные процессы.* Л.: Гидрометеоздат, 1990. 463 с.
5. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвек-

тивных облаков. *ДАН СССР.* 1982, **262**(6), 1344–1347.

6. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Голованов А.С., Рыбакова М.В. Электромагнитное излучение, генерируемое капиллярными осцилляциями заряженных капель. *ЖТФ.* 2002, **72**(1), 8–14.
7. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Заряженная капля в грозовом облаке.* Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
8. Богатов Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель. *Сборник тезисов докладов VI Международной конференции «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений».* Петропавловск-Камчатский. 9–13 сентября 2013. ДВО РАН. С. 22–26.
9. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
10. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* М.: Наука, 1979. 830 с.
11. Мазин И.П., Шмелер С.М. *Облака. Строение и физика образования.* Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
12. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. *Облака и облачная атмосфера.* Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
13. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод. *ЖТФ.* 2002, **72**(4), 15–19.
14. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С. Электромагнитное излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли. *Письма в ЖТФ.* 2001, **27**(20), 65–71.
15. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электромагнитное излучение осциллирующей заряженной вязкой капли конечной проводимости. *Известия РАН. МЖГ.* 2002, (5), 67–73.
16. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики.* Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.

Поступила 26.06.14

После доработки 31.07.14

Summary

Via the carried-out calculations, analytical expressions were found for the intensity of an electric field in a vicinity of an oscillating charged drop of nonviscous electrically conducting liquid and the intensity of electromagnetic radiation from it in linear on the indignation amplitude approach. Estimates in the order of magnitude are carried out.

Keywords: spherical drop, electric charge, oscillation, radiation, electromagnetic waves.