Ф.П. Гросу

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОДНОМЕРНОМ ЭГД-ТЕЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

Институт прикладной физики АН РМ,
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова
Государственный аграрный университет Молдовы,
ул. Мирчешть, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова

Одномерные стационарные электрогидродинамические (ЭГД) течения представляют особый практический интерес, поскольку на их основе действуют разнообразные ЭГД–преобразователи энергии и устройства, такие как ЭГД–генераторы, насосы, фильтры и т.п. [1]. Вместе с тем задачи, посвященные этим течениям, решаются в частном порядке при тех или иных упрощающих обстоятельствах, ограничивающих область применения соответствующих решений.

Ниже решается «электрическая часть» стационарной ЭГД–задачи с учетом наиболее важных составляющих плотности тока, имеющей следующий исходный вид:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} + k\rho\vec{E} + \rho\vec{\upsilon}, \tag{1}$$

где σ и k – удельная электропроводность среды и подвижность носителей объемных зарядов плотностью ρ; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{\upsilon}$ – гидродинамическая скорость.

Первое слагаемое – ток сквозной (собственной) проводимости, второе – ток сквозной проводимости объемных зарядов, допускающий двойную физическую трактовку. А именно: сгруппировав первые два слагаемые в (1), произведение $k\rho \equiv \sigma'$ можно рассматривать как добавку к удельной электропроводимости σ за счет избытка (дефицита) зарядов. Группировка с третьим, конвективным током позволяет трактовать $k\vec{E} = \vec{\upsilon}_r$ как добавку к конвективной скорости $\vec{\upsilon}$, причем коэффициент подвижности k определяется относительной скоростью заряженной компонентой $\vec{\upsilon}_r$ в соответствии с общей формулой для абсолютной скорости $\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e$, где роль переносной скорости играет $\vec{\upsilon}_e \equiv \vec{\upsilon}$ – скорость среды. При $\vec{\upsilon}_r \sim k = 0$ имеем случаи движения «вмороженного» в среду заряда [1]. Для неподвижной среды ($\vec{\upsilon} \equiv 0$) решение нестационарной (релаксационной) задачи $\left(\partial\vec{E}/\partial t \neq 0\right)$ с учетом слагаемого $k\rho\vec{E}$ приведено в работе [2], в которой показано, что данное слагаемое приводит к новым качественным результатам по сравнению с максвелловским релаксационным процессом $\left(\rho \sim \exp(-\alpha t)\right)$. Аналогичная задача применительно к релаксации зарядов в стационарном потоке ($\vec{\upsilon} \neq f(t)$, $\left(\partial\vec{E}/\partial t \neq 0\right)$) решается приближенно [3], причем предельным переходом $t \to \infty$ $\left(\partial\vec{E}/\partial t \to 0\right)$ найдено соответствующее приближенное стационарное решение. Ниже отыскиваются стационарные решения уравнения (1) как для частных случаев пренебрежения отдельными членами (1), так и для общего случая учета всех трех составляющих.

Предварительно рассмотрим некоторые особенности одномерности ЭГД–течений в целом, предполагая, что течение направлено вдоль оси OX, так что $\vec{\upsilon} = \vec{i}\,\upsilon_x$, $\upsilon_x \equiv \upsilon$ причем в силу предполагаемой несжимаемости среды $\left(div\,\vec{\upsilon} = 0\right)$ найдем υ = υ (y, z). Далее ограничимся наиболее типичным случаем – продольного электрического поля:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Отсюда, полагая наряду с σ и k абсолютную диэлектрическую проницаемость ($\varepsilon \equiv \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$) постоянной, приходим к выводу:

$$\rho = \varepsilon \frac{dE(x)}{dx} \equiv \varepsilon E'(x) = \rho(x). \tag{2}$$

Аналогично из равенств $\vec{j} = \vec{i} j_x \equiv \vec{i} j$ и $div\,\vec{j} = 0$ следует $j = j\ (y, z)$. Следовательно, проекция уравнения (1) на ось ОХ имеет вид

$$j(y, z) = \sigma E(x) + k\rho(x)E(x) + \rho(x)\upsilon(y, z). \tag{3}$$

Дифференцируя (3) сначала по переменной y (или z), затем по x, заключаем, что $\rho = \text{const}$. Тогда, дифференцируя (3) по x, найдем $E' = 0$, то есть $\rho = 0$. Следовательно, приходим к общему выводу, что предполагаемое строгое одномерное движение при $\rho \neq 0$ невозможно, это согласуется с теоретическим положением, при котором электроконвективные течения могут быть вызваны лишь вихревыми силами $rot\ \vec{f} \neq 0$ [4], а потому не могут быть одномерными.

Очевидно, что в данном случае некорректность уравнения (3) связана с наличием у напряженности поля и поперечной составляющей ($E_\perp \neq 0$). Поэтому степень справедливости (3) определяется неравенством $E_\perp << E_x$. Тогда уравнение (3) следует понимать как усредненное (наряду с остальными уравнениями ЭГД) по поперечному сечению течения, подразумевая под j и υ средние значения:

$$\overline{j} = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} j dS \equiv I/S\ ;\ \ \overline{\upsilon} = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} \upsilon dS \equiv G/S\ , \tag{4}$$

где S – площадь поперечного сечения ЭГД–канала, I – полный ток, G – расход жидкости.

С учетом сказанного (2), уравнение (3) принимает вид

$$\overline{j} = \varepsilon\left(kE + \overline{\upsilon}\right)E' + \sigma E\ , \tag{5}$$

причем для краткости черточки будем опускать.

Данное уравнение допускает непосредственное интегрирование и решение $E(x)$ имеет следующий неявный вид:

$$E - E_0 + \frac{kj + \sigma\upsilon}{\sigma k}\ln\left|\frac{j - \sigma E}{j - \sigma E_0}\right| = -\frac{x - x_0}{k\tau}, \tag{6}$$

где E_0 определяется краевым условием

$$E_0 = E(x)\Big|_{x = x_0}. \tag{7}$$

Рассмотрим частные случаи, которые могут встречаться в разных практических ситуациях. При этом можно исходить из (6), осуществляя соответствующие предельные переходы с раскрытием возможных неопределенностей, однако зачастую оказывается проще решать частные уравнения.

1. «Вмороженный» заряд в идеальном диэлектрике: $\sigma = 0, k = 0, \upsilon \neq 0$.

Уравнение (3) и его решение имеют вид:

$$j = \rho\upsilon = \varepsilon\upsilon\frac{dE}{dx}\ , \tag{8}$$

$$E = E_0 + \frac{j\left(x - x_0\right)}{\varepsilon\upsilon},\quad \rho = \frac{j}{\upsilon} = \text{const}\ . \tag{9}$$

Это наиболее оптимальный вариант режима работы как ЭГД–генератора, так и ЭГД–насоса, так как отсутствует «скольжение» зарядов относительно среды ($\upsilon_r \sim k = 0$). Интегрируя уравнение для потенциала

$$-\frac{d\varphi}{dx} = E\ , \tag{10}$$

получим разность потенциалов (напряжение) на концах ЭГД–канала:

$$U \equiv \varphi_0 - \varphi_L = E_0\left(L - x_0\right) + \frac{j}{2\varepsilon\upsilon}\left(L - x_0\right)^2, \tag{11}$$

где L – координата конца канала; $(L - x_0)$ – его длина.

В режиме ЭГД–генератора из (11) получаем ЭДС, полагая ток равным нулю:

$$\varepsilon = U\Big|_{j=0} = E_0\left(L - x_0\right). \tag{12}$$

При этом согласно (8), (9) ρ = 0, что означает полное разделение зарядов; ЭГД–канал подобен заряженному конденсатору.

2. Идеальный неподвижный диэлектрик при наличии подвижных объемных зарядов: $\sigma = 0$, $k \neq 0$, $\upsilon = 0$.

Этот случай встречается при расчетах коронного разряда в газах [5]. Уравнение и его решение имеют соответственно вид:

$$j = k\rho E = \varepsilon k E\frac{dE}{dx}, \tag{13}$$

$$E = \pm\sqrt{\frac{2j\left(x - x_0\right)}{\varepsilon k} + E_0^2}\ . \tag{14}$$

Эти же формулы определяют максимальный гидростатический напор в ЭГД–насосах идеальной диэлектрической жидкости.

Соответствующее падение потенциалов равно:

$$U = \pm\frac{1}{3}\frac{\varepsilon k}{j}\left\{\left[\frac{2j\left(x - x_0\right)}{\varepsilon k} + E_0^2\right]^{3/2} - E_0^3\right\}. \tag{15}$$

Раскрыв неопределенность в этой формуле при $j = 0$, найдем ЭДС в случае ЭГД–генератора, совпадающей с (12).

3. Слабопроводящая неподвижная среда при нулевой подвижности объемных зарядов: $\sigma \neq 0$, $k = 0$, $\upsilon = 0$.

$$j = \sigma E \Rightarrow E = j/\sigma = \text{const} \Rightarrow \rho = 0, \tag{16}$$

то есть в неподвижной среде ток собственной проводимости не приводит к зарядке среды.

4. Слабопроводящая движущая жидкость при нулевой подвижности: $\sigma \neq 0$, $k = 0$, $\upsilon \neq 0$.

Уравнение и его решение имеют вид:

$$j = \sigma E + \rho\upsilon = \sigma E + \varepsilon\upsilon\frac{dE}{dx}, \tag{17}$$

$$\left|E - \frac{j}{\sigma}\right| = \left|E_0 - \frac{j}{\sigma}\right|e^{-\frac{x - x_0}{\tau\upsilon}}\ . \tag{18}$$

Полагая величины под знаком модуля знакопостоянными и одинакового знака, прямые скобки можно заменить на круглые и тогда для плотности зарядов будем иметь

$$\rho = -\frac{\sigma}{\upsilon}\left(E_0 - \frac{j}{\sigma}\right)e^{-\frac{x - x_0}{\tau\upsilon}}\ . \tag{19}$$

Отсюда следует, что при $\upsilon \to 0$ в соответствии с предыдущем случаем (формулы (16)) и $\rho \to 0$, в то время как из $\upsilon \neq 0$ следует $\rho \neq 0$, то есть зарядка жидкости обусловлена ее движением, это обстоятельство объясняется тем, что если $\rho\left(x\right)\Big|_{x = x_0} = \rho_0 \neq 0,$ то благодаря движению заряд переносится по течению, распределяясь согласно (19).

Из (18) находим

$$U = \frac{j}{\sigma}\left(L - x_0\right) + \tau\upsilon\left(E_0 - \frac{j}{\sigma}\right)\left(1 - e^{-\frac{L - x_0}{\tau\upsilon}}\right). \tag{20}$$

Положив $j = 0$, получим

$$\mathcal{E} = U\Big|_{j=0} = \tau\upsilon E_0\left(1 - \frac{L - x_0}{\tau\upsilon}\right). \tag{21}$$

Здесь явная зависимость ЭДС от скорости движения жидкости, однако при $(L - x_0)/\tau\upsilon \ll 1$ снова получим (12).

5. Неподвижная жидкость $\sigma \neq 0$, $k \neq 0$, $\upsilon = 0$.

Такого типа задачи встречаются при расчетах максимального напора в ЭГД–насосе. В этом случае

$$j = \sigma E + k\rho E = \sigma E + \varepsilon k E\frac{dE}{dx}, \tag{22}$$

$$\frac{j}{\sigma}\ln\left|\frac{j-\sigma E}{j-\sigma E_0}\right| = -\frac{x-x_0}{k\tau}-\left(E-E_0\right), \tag{23}$$

что непосредственно следует из (6) при $\upsilon = 0$.

Разложение логарифмической функции по параметру σ с точностью до членов ~ σ^2 включительно приводит к зависимости (14). Следовательно, электропроводность при ее низких значениях ($\sigma \to 0$) не влияет на распределение поля.

При $j = 0$ из (23) получим

$$E = E_0 - \frac{x-x_0}{k\tau}, \quad \rho = -\frac{\sigma}{k}, \tag{24}$$

$$U = \mathcal{E} = \left(L-x_0\right)\left(E_0 - \frac{L-x_0}{2k\tau}\right). \tag{25}$$

Такого типа зависимости характерны для гидростатического режима ЭГД–генератора, когда ток собственной проводимости полностью ограничен током объемных зарядов.

6. Идеальная движущаяся диэлектрическая жидкость при отличной от нуля подвижности объемных зарядов $\sigma = 0,\ k \neq 0,\ \upsilon \neq 0$.

Это случай высоковольтных сред с сильной инжекцией объемных зарядов. Уравнение и его решение следующие:

$$j = k\rho E + \rho\upsilon = \left(kE+\upsilon\right)\varepsilon\frac{dE}{dx}, \tag{26}$$

$$E = -\frac{\upsilon}{k} \pm \sqrt{\left(E_0+\frac{\upsilon}{k}\right)^2 + \frac{2j\left(x-x_0\right)}{\varepsilon k}}, \tag{27}$$

где знаки перед корнем соответствуют знакам напряженности поля. В режиме разомкнутой цепи ($j = 0$) $E = E_0 = \text{const}$. Физическая суть данного результата лучше просматривается из (26): по мере развития ЭГД–процесса происходит разделение зарядов – их перенос за счет движения к коллектору. При этом возникает противоток ($-k\rho E$). В состоянии динамического равновесия $E \to -\upsilon/k$, $\rho \to 0$. Заряд адсорбируется коллектором, ЭГД–канал превращается в конденсатор, причем данное значение напряженности – максимально возможная величина.

Дифференцируя (27) находим плотность объемного заряда

$$\rho = \pm\frac{j}{k\sqrt{\left(E_0+\frac{\upsilon}{k}\right)^2 + \frac{2j\left(x-x_0\right)}{\varepsilon k}}}. \tag{28}$$

Интегрированием (27) находим

$$U = -\frac{\upsilon}{k}\left(L-x_0\right) \pm \frac{\varepsilon k}{3j}\left\{\left[\left(E_0+\frac{\upsilon}{k}\right)^2 + \frac{2j\left(L-x_0\right)}{\varepsilon k}\right]^{3/2} - \left(E_0+\frac{\upsilon}{k}\right)^3\right\}. \tag{29}$$

При $\upsilon = 0$ получим (15). Раскрыв неопределенность при $j = 0$, находим ЭДС генератора:

$$\mathcal{E} = U\Big|_{j=0} = \pm\left(E_0+\frac{\upsilon}{k}\right)\left(L-x_0\right). \tag{30}$$

Для неподвижной жидкости получим (12).

7. Общий случай $\sigma \neq 0,\ k \neq 0,\ \upsilon \neq 0$. Соответствующее решение имеет неявный вид (6). Ограничиваясь малыми значениями σ и разложив в (6) логарифмическую функцию по степеням σ с точностью до членов ~ σ^2 включительно, получим

$$E = -\frac{\upsilon j}{kj+\sigma\upsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\upsilon j}{kj+\sigma\upsilon}+E_0\right)^2 + \frac{2j^2\left(x-x_0\right)}{\varepsilon\left(kj+\sigma\upsilon\right)}}. \tag{31}$$

При $\sigma = 0$, как и следовало ожидать, получим (27). Дифференцируя (31) находим

$$\rho = \pm \frac{j^2}{\left(kj+\sigma\upsilon\right)\sqrt{\left(\dfrac{\upsilon j}{kj+\sigma\upsilon}+E_0\right)^2+\dfrac{2j^2\left(x-x_0\right)}{\varepsilon\left(kj+\sigma\upsilon\right)}}}. \qquad (32)$$

Частный случай $\sigma = 0$ приводит к формуле (28). Интегрируя (31), получим разность потенциалов

$$U = -\frac{\upsilon j\left(L-x_0\right)}{kj+\sigma\upsilon} \pm \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon\left(kj+\sigma\upsilon\right)}{j^2}\left\{\left[\left(\frac{\upsilon j}{kj+\sigma\upsilon}+E_0\right)^2+\frac{2j^2\left(L-x_0\right)}{\varepsilon\left(kj+\sigma\upsilon\right)}\right]^{3/2}-E_0^3\right\}. \qquad (33)$$

Раскрыв неопределенность при $j \to 0$, найдем ЭДС, формулу не приводим ввиду ее громоздкости.

Таким образом, получены наиболее важные формулы и соотношения для электрических характеристик ЭГД–течений, которые могут служить основой для инженерных расчетов ЭГД–преобразователей энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубашов И.Б., Бортиков Ю.С.* Электрогазодинамика. М., 1971.
2. *Цырлин Л.Э.* О нестационарных полях и токах с малой собственной проводимостью // Вопросы математической физики. Л., 1976.
3. *Гросу Ф.П.* Релаксация объемных зарядов в стационарном ЭГД–потоке // Электронная обработка материалов. 2004. № 3. С. 41 – 47.
4. *Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев, 1977.
5. *Капцов Н.А.* Коронный разряд и его применение в электрофильтрах. М.; Л., 1947.

Поступила 09.04.04

Summary

Electric part of the problem of EHD flow of charged dielectric liquid in steady conditions has been solved. Private solutions for electric field intensity, difference of potentials, electromotive force, and space charge density are obtained. Physical aspects of obtained results, which can be used in calculations of EHD converters of energy, are discussed.