

# О равновесной форме заряженной капли в электростатическом поле

А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 15000, Россия, e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)

Установлено, что равновесная форма заряженной капли в однородном электростатическом поле в расчётах первого порядка малости по величине стационарной деформации может считаться сфероидальной, а её эксцентриситет зависит от величины заряда и напряженности внешнего поля. На пороге потери устойчивости по отношению к суперпозиции собственного и поляризационного зарядов квадрат равновесного эксцентриситета сильно заряженной капли в слабом поле не превышает 0,34, а квадрат равновесного эксцентриситета слабо заряженной капли в сильном поле (в смысле возможности реализации неустойчивости) не превышает 0,78.

*Ключевые слова:* сфероидальная капля, электростатическое поле, заряд, равновесная форма капли.

УДК 532.62:532.592: 530.18: 534.1:541.24:621.319.7

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о равновесной форме заряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле в процессе её электростатического распада на дочерние капли представляет как научный, так и практический интерес в связи с многочисленными приложениями этого процесса, например, в физике атмосферы в грозовых облаках [1]; в технике и различных технологиях [2]; в приборостроении, в жидкостной масс-спектрометрии как основной объект [3] и жидкометаллических источниках ионов как паразитное явление [4].

Известно [5–7], что неподвижная незаряженная капля во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $E_0$  принимает равновесную форму сфероида, вытянутого по полю с эксцентриситетом  $e_0 \equiv \sqrt{9E_0^2 R / 16\pi\sigma}$ , где  $R$  – исходный радиус сферической капли;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Спрашивается, что произойдёт с формой капли, если на неё поместить ещё заряд  $Q$ ? В этом случае на капле будет находиться и свободный заряд, и поляризационный, который в районе экватора капли меняет знак. Из общефизических соображений ясно, что форма капли станет грушевидной с утолщением на том конце капли, где знак поляризационного заряда совпадает со знаком свободного заряда, и с утоньшением – на противоположном конце капли, где знаки поляризационного и собственного зарядов противоположны. От соотношения величин поляризационного и собственного зарядов будет зависеть и степень грушевидности: она будет малой при большой величине собственного заряда и малой – поляризационного или, наоборот, при

большом поляризационном заряде и малом собственном. Степень грушевидности будет большой при сравнимых величинах собственного и поляризационного зарядов. Отметим, что свободный заряд на капле при наличии как угодно малого внешнего электростатического поля, определяющего одно направление (направление  $\vec{E}_0$ ) как выделенное, будет заставлять две половинки капли отталкиваться друг от друга. В отсутствие свободного заряда на капле остаётся только поляризационный, имеющий разные знаки на разных половинках, и поле заставляя каплю вытягиваться. Таким образом, физические механизмы влияния на вытягивание сферической капли в сфероид поляризационного и собственного зарядов различны.

## РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Пусть имеется заряженная капля в однородном электростатическом поле. Предполагая, что форма капли близка к вытянутому сфероиду, рассчитаем её эксцентриситет из принципа минимальности потенциальной энергии, как это было сделано в [5] для незаряженной капли.

Сначала примем, что дана незаряженная капля во внешнем однородном электростатическом поле. Температура капли и окружающей среды постоянна, и объём жидкой фазы не меняется. Согласно вышесказанному, капля принимает равновесную сфероидальную форму с эксцентриситетом  $e_0$ . Энергия сил поверхностного натяжения капли будет иметь вид [5]:

$$U_\sigma = 2\pi R^2 \sigma (1 - e_0^2)^{2/3} \left( 1 + \frac{\arcsin e_0}{e_0 (1 - e_0^2)^{1/3}} \right). \quad (1)$$

Энергия незаряженной неподвижной капли в поле  $E_0$  равна [5]:

$$U_E = -\frac{1}{3}E_0^2 R^3 \frac{e_0^3}{(1-e_0^2) \left[ \ln \frac{1+e_0}{1-e_0} - 2e_0 \right]}, \quad (2)$$

где, согласно вышесказанному,  $e_0 \equiv \sqrt{9E_0^2 R / 16\pi\sigma}$ .

Сумма  $U_\sigma$  и  $U_E$  дает полную свободную энергию системы. Взяв от этой суммы производную по  $e_0$  и приравнявая ее нулю, из принципа минимума свободной энергии найдем вышеприведенное выражение  $e_0$  через  $E_0$ ,  $R$  и  $\sigma$ . Это впервые было проделано в [5].

Поместим теперь на каплю электрический заряд  $Q$ . Согласно сказанному выше, удлинение капли увеличится. Считая грушевидное искажение малым, много меньшим исходного сфероидального, примем, что капля при расчетах с точностью порядка квадрата эксцентриситета будет иметь сфероидальную форму с эксцентриситетом  $e$ . Свободная энергия при этом увеличится на [7]:

$$U_Q = -\frac{Q^2 (1-e^2)^{1/3}}{4R} \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad (3)$$

где  $e > e_0$ . Далее в выражениях (1) и (2) приближенно полагаем, что  $e_0 \approx e$ , и прибавляем к (1) и (2) энергию заряда  $Q$  (3). Тогда из принципа минимальности свободной энергии новой системы определим, как это было сделано выше,  $e$  в виде

$$e^2 = \frac{9E_0^2 R^4}{(16\pi R^3 \sigma - Q^2)}. \quad (4)$$

Вводя безразмерные параметры полевой  $\Lambda^2$  и зарядовой  $W^2$ ,

$$\Lambda^2 \equiv \frac{E_0^2 R}{\sigma}, \quad W^2 \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3},$$

перепишем (4) в виде

$$e^2 = \frac{9\Lambda^2}{16\pi(1-W^2)}. \quad (5)$$

При выводе (5) было сделано только одно предположение: о малости грушевидного искажения. Согласно сказанному выше, грушевидное искажение мало при малых зарядах и сильных полях и, наоборот, при больших зарядах и слабых полях. Именно такая ситуация складывается в электростатическом подвесе, который является обязательным элементом удерживающих устройств при проверке правильности критерия Рэлея [8–9]. Грушевидное искажение, пропорциональ-

ное третьей степени эксцентриситета сфероидальной компоненты формы капли [10], также мало по абсолютной величине, когда мал сам эксцентриситет: при малых зарядах и слабых полях.

## ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рис. 1а–в иллюстрируют зависимость (5). Предполагается, что полевой и зарядовый параметры изменяются независимо. Из рис. 1а видно, что при больших значениях зарядового и полевого параметров эксцентриситет быстро достигает предельных значений. Но при таких значениях параметров грушевидное искажение капли значительно, и выражение (5) неприменимо. Зависимость (5) при малых значениях полевого параметра и при изменении зарядового параметра во всем формально допустимом диапазоне проиллюстрирована на рис. 1б. Ситуация с малыми зарядами и полями, когда грушевидное искажение мало, а выражение (5) справедливо, показана на рис. 1в.

Но зарядовый и полевой параметры на пределе устойчивости по отношению к суперпозиции собственного и индуцированного зарядов связаны между собой соотношением [11]:

$$W^2 + \frac{\Lambda W}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left[ \frac{e^3}{(1-e^2)^{2/3} (\text{Arth } e - e)} - 3(1-e^2)^{1/3} \right] + \frac{11 \cdot \Lambda^2}{21 \cdot 16\pi} \left( \frac{e^6}{(1-e^2)^{4/3} (\text{Arth } e - e)^2} \right) \geq 1; \quad (6)$$

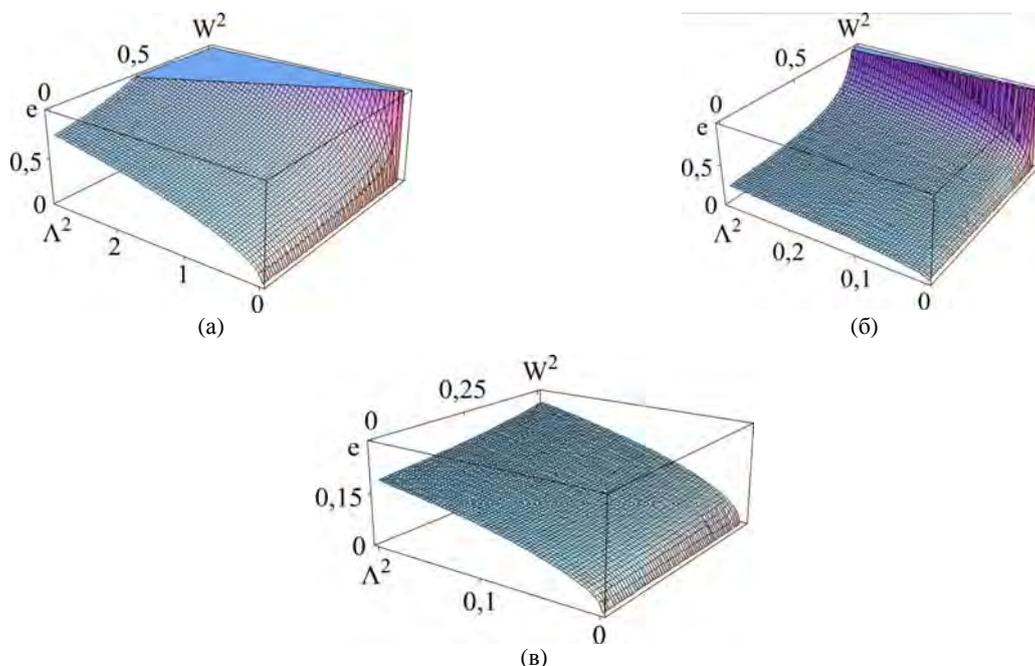
где аналитическое выражение для эксцентриситета определяется согласно (5). Соотношение (6) точно выполняется в двух крайних точках:  $W^2 = 1$ ;  $\Lambda^2 = 0$  и  $W^2 = 0$  и  $\Lambda^2 = 2,6$ , а в промежуточных оно выполняется лишь приближенно, с точностью до постоянного множителя  $\approx 1$ . График этой зависимости приведен на рис. 2.

При выводе соотношения (6) предполагалось, что капля неподвижна в электростатическом поле и в поле сил тяжести. Учитывалось, что ускорение поля сил тяжести  $\vec{g}$  связано с зарядом капли и величиной поля:

$$\vec{g} = -\frac{3Q\vec{E}_0}{4\pi R^3 \rho},$$

где  $\rho$  – массовая плотность жидкости.

При выполнении условий  $W^2 \geq 1$  и  $\Lambda^2 = 0$  электростатическую неустойчивость испытывает сильно заряженная сферическая капля. При этом претерпевает неустойчивость основной мод её осцилляций, и её амплитуда начинает неконтролируемо расти, капля вытягивается в сфероид и

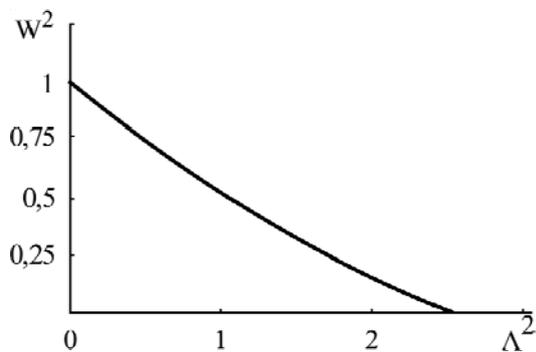


**Рис. 1.** Зависимость квадрата эксцентриситета заряженной капли в электростатическом поле от величины безразмерных зарядового и полевого параметров, построенная в предположении, что они изменяются независимо: (а) общий вид; (б) сильно заряженная капля в слабом поле; (в) малые заряды и поля, когда грушевидное искажение мало.

сбрасывает избыточный заряд с двух концов путём эмиссии около двух сотен на два порядка более мелких, чем исходная, сильно заряженных капель [12–14].

При выполнении условий  $W^2 = 0$  и  $\Lambda^2 \geq 2,6$  электростатическую неустойчивость испытывает незаряженная капля в однородном электростатическом поле [15–17]. Закономерности её реализации примерно такие же, как у заряженной капли [16–17]. Правда, исходная равновесная форма не сферическая, а сфероидальная с эксцентриситетом  $e_0 = \frac{9\Lambda^2}{16\pi}$  [5, 15–17].

Из рис. 2 видно, что зависимость (6) почти линейная, но углы наклона касательной к кривой (6) при  $W^2 \sim 1$  и  $\Lambda^2 \sim 2,6$  отличаются.



**Рис. 2.** Связь между зарядовым и полевым параметрами на пределе устойчивости.

Для оценки по порядку величины заменим зависимость (6) прямолинейной, проходящей через две крайние точки:

$$W^2 = 1 - \frac{1}{2,6} \Lambda^2 \equiv 1 - k \cdot \Lambda^2, \quad (7)$$

где  $k$  – тангенс угла наклона прямой (7). Выразим из (7)  $\Lambda^2$  и подставим в (5). Получим выражение для квадрата эксцентриситета на пороге устойчивости:

$$e^2 = \frac{9\Lambda^2}{16\pi(1-W^2)} \equiv \frac{9(1-W^2)}{16\pi k(1-W^2)} \equiv \frac{9}{16\pi k}.$$

Подставим в это выражение значение  $1/k$  и получим  $e^2 \approx 0,466$ . В реальности зависимость (6) отличается от прямой, и абсолютная величина тангенса угла наклона касательной к кривой (6) при  $W^2 \sim 1$  будет по абсолютной величине больше, чем  $1/2,6$ , а при  $\Lambda^2 \sim 2,6$  – меньше. Соответственно квадрат эксцентриситета капли при  $W^2 \sim 1$  будет больше  $0,466$ , а при  $\Lambda^2 \sim 2,6$  – меньше. Искать аналитическую зависимость между абсолютной величиной тангенса угла наклона касательной и параметрами  $W^2$  и  $\Lambda^2$  по (6) с учетом (5) достаточно проблематично из-за громоздкости выкладок. Поэтому найдем абсолютные величины тангенсов углов наклона касательных в двух крайних точках графически по рис. 2. Все другие значения будут лежать между ними.

При  $W^2 \approx 1$  абсолютная величина тангенса угла наклона касательной к кривой (6) равна примерно  $(1/1,9) \approx 0,53$ , а квадрат эксцентриситета –  $e^2 \approx 0,34$ . При  $\Lambda^2 \sim 2,6$  абсолютная величина тангенса угла наклона касательной к кривой (6) равна примерно  $(0,59/2,6) \approx 0,23$ , а квадрат эксцентриситета –  $e^2 \approx 0,78$ . Конечно, приводимые рассуждения и оценки являются приближенными, но в условиях отсутствия других оце-

нок их можно взять за отправные точки для будущих исследований.

### ПРОВЕРКА КРИТЕРИЯ РЭЛЕЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ ПРОВОДЯЩЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Критические условия реализации неустойчивости изолированной капли электропроводной идеальной несжимаемой жидкости по отношению к собственному заряду теоретически строго вывел в конце девятнадцатого века Рэлей в виде соотношения  $W \equiv (Q^2/16\pi\sigma R^3) \geq 1$ . В течение двадцатого века и в начале двадцать первого этот критерий неоднократно экспериментально проверялся в различного вида лабораторных установках: в вертикальном электростатическом поле между плоскими пластинами (то есть в электростатическом подвесе, типа использованного Милликоном в экспериментах по определению заряда электрона) [18]; в неоднородном периодически изменяющемся во времени электрическом поле между электродами сложной геометрии (комбинация колец, цилиндрических и сферических поверхностей) [19]; в комбинированном электрическом подвесе с электростатическим и периодически изменяющемся электрическими полями между тремя плоскими электродами [20], в воздушном потоке [21]; в электродинамическом подвесе на основе двух кольцевых электродов [9, 22]. Эксперименты были проведены с каплями широкого диапазона размеров: сотни микрометров в работах [18, 21, 23], десятки микрометров в работах [19–20] и единицы микрометров в исследовании [9, 22]. Во всех случаях справедливость критерия Рэля была подтверждена. Причем наибольшая точность экспериментов была достигнута в исследовании [20], где критерий Рэля был подтвержден с точностью до 4%, и в работах [9, 22], где точность была около 5%.

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОДВЕС

Пусть  $W^2 \sim 1$  в электростатическом поле исчезающе малой напряженности, силовым воздействием которого на каплю можно пренебрегать и считать, что поле только выделяет направление. Ситуация, характерная для электростатических подвесов, используемых для проверки справедливости критерия Рэля, и по полученным данным, можно оценить допустимую погрешность при их использовании.

Если в начальный момент времени заряженной капле виртуальным образом придана сфероидальная форма, то величина критического для

реализации электростатической неустойчивости заряда будет зависеть от квадрата эксцентриситета капли [13]. Соответствующая зависимость от квадрата эксцентриситета зарядового параметра приведена на рис. 3 [13].

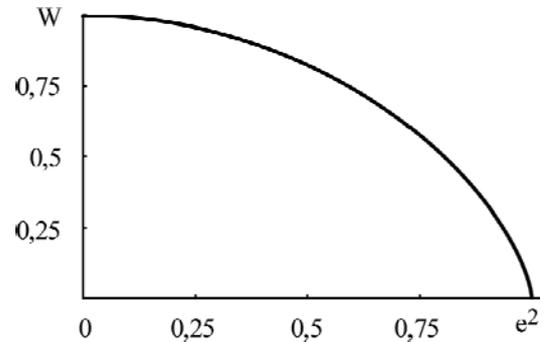


Рис. 3. Зависимость критического значения зарядового параметра сфероидальной капли от квадрата ее эксцентриситета.

Для удобства дальнейших вычислений, чтобы не зависеть от размеров капли и величины поверхностного натяжения, перейдем к безразмерным переменным, в которых  $R = \sigma = \rho = 1$ . В этом случае критерий электростатической неустойчивости по отношению к собственному заряду имеет вид

$$W^2 \equiv \frac{Q^2}{16\pi} \geq 1.$$

Рассмотрим ситуацию  $W^2 \sim 1$  и  $\Lambda^2 \sim 1 - W^2$ . Согласно вышесказанному, квадрат эксцентриситета сильно заряженной капли в слабом электростатическом поле –  $e^2 \approx 0,34$ . По рис. 3 найдем критическое значение зарядового параметра, при таком значении квадрата эксцентриситета  $W^2 = 0,92$ . Отсюда легко найти величину критического заряда капли, которую можно измерить в электростатическом подвесе  $Q \approx 0,959$ . То есть погрешность по отношению к истинному критическому заряду будет  $\sim 4\%$ . Именно такая погрешность отмечается при точных измерениях [9, 18, 22].

Интересно отметить, что предлагаемая модель распада сильно заряженной капли объясняет факт уменьшения критического заряда капли при нескольких последовательных распадах [9]. В самом деле, при рэлеевском распаде капля теряет  $\approx 23\%$  своего заряда и  $\approx 5\%$  массы [14, 20]. С остатком заряда капля возвращается к устойчивой сфероидальной форме, поскольку она находится в электростатическом поле и имеет электрический заряд, правда, эксцентриситет станет меньшим, чем был у исходной капли, так как ее заряд уменьшился. Чтобы капля попала в поле зрения микроскопа (экспериментатора), нужно увеличивать напряженность электростатического поля. Согласно вышесказанному (согласно рис. 2), она сдвинется по кривой на рис. 2 вниз. Ее эксцентриситет при этом увеличится, и для

распада капли будет нужен меньший заряд, согласно рис. 3. Так может повторяться несколько раз. В [9] данный экспериментальный факт объясняли уменьшением величины поверхностного натяжения жидкости. Нужно сказать, объяснение весьма натянутое.

Следует отметить, что после нескольких последовательных распадов собственный заряд капли значительно уменьшится, а внешнее электростатическое поле, необходимое для поддержания капли в неподвижности, а значит, вместе с ним и индуцированный заряд увеличится. Следовательно, грушевидное искажение станет значительным, а вышеприведенные рассуждения непригодными.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приведенных расчетах показано, что равновесная форма заряженной капли в однородном электростатическом поле в расчётах, линейных по стационарному отклонению от сферы, может считаться вытянутой сфероидальной в двух крайних случаях: сильно заряженной капли в слабом поле и слабо заряженной капли в сильном поле. Эксцентриситет сфероида в этих двух случаях существенно различается. На пределе потери устойчивости сильно заряженной капли в однородном электростатическом поле эксцентриситет капли остается конечным.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Заряженная капля в грозовом облаке*. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
2. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях. *ЭОМ*. 1990, (6), 23–32.
3. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Физические закономерности формирования ионно-кластерно-капельного пучка в жидкостном масс-спектрометре. *ЖТФ*. 1993, **63**(8), 162–170.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электрогидродинамические аспекты функционирования жидкометаллических источников ионов. *ЖТФ*. 1992, **62**(12), 9–20.
5. O' Konski C.J., Thacher H.C. The Distortion of Aerosol Droplets by an Electric Field. *J Phys Chem*. 1953, **57**, 955–958.
6. Cheng K.J. Capillary Oscillations of Drop in an Electric Field. *Phys Lett*. 1985, **112A**(8), 392–396.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Гостехтеориздат, 1957. 532 с.
8. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. Behavior of Evaporating Electrically Charged Droplets. *J Coll Sci*. 1964, **19**, 136–143.
9. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. Shape Oscillations and Stability of Charged Microdroplets. *Phys Rev Lett*. 2002, **89**(8), 1–4.
10. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях. *ЖТФ*. 1989, **59**(6), 27–34.
11. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе. *ЭОМ*. 2015, **51**(3), 44–50.
12. Rayleigh (Strutt J.W.) On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity. *Phil Mag*. 1882, **14**, 184–186.
13. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. *ЖТФ*. 1985, (7), 1272–1278.
14. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Закономерности распада сильно заряженной капли. *ЖТФ*. 1989, **59**(11), 119–121.
15. Taylor G.I. Disintegration of Water Drops in an Electric Field. *Proc Roy Soc*. 1964, **A280**, 383–397.
16. Григорьев А.И., Синкевич О.А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электростатическом поле. *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985, (6), 10–15.
17. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. The Theoretical Consideration of Physical Regularities of the Electrostatic Dispersion of Liquids as Aerosols. *J Aerosol Sci*. 1994, **25**(6), 1079–1091.
18. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. Behavior of Evaporating Electrically Charged Droplets. *J Coll Sci*. 1964, **19**, 136–143.
19. Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. Stable, Unstable and Metastable Charged Droplets. *J Atmosph Sci*. 1970, **27**(11), 1173–1181.
20. Schweizer J.D., Hanson D.N. Stability Limit of Charged Drops. *J Coll Int Sci*. 1971, **35**(3), 417–423.
21. Roulleau M., Desbois M. Study of Evaporation and Instability of Charged Water Droplets. *J Atmosph Sci*. 1972, **29**(4), 565–569.
22. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. Rayleigh Jets from Levitated Microdroplets. *Nature*. 2003, 421, 128.
23. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-induced Droplet Ionization: Time-resolved Studies of Distorsion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplet Exposed to Strong Electric Fields. *J Phys Chem B*. 2005, **109**, 8244–8250.

*Поступила 05.06.14*

*После доработки 12.11.14*

#### Summary

Analytically it is found that the equilibrium form of a charged drop in a uniform electrostatic field, which in calculations of the first order of smallness for the size of stationary deformation, can be considered spheroidal, and its eccentricity depends on the charge size and on the intensity of an external electrostatic field. On the threshold of losing stability in relation to the superposition of its own and of the polarizing charges, the square of the equilibrium eccentricity of a strongly charged drop in a weak field does not exceed 0.34, and the square equilibrium eccentricity of a weakly charged drop in a strong field does not exceed 0.78 (in view of an opportunity to realize instability).

*Keywords: spheroidal drop, electrostatic field, charge, equilibrium form of a drop.*