

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов

## **О ФОРМЕ “КОНУСА ТЕЙЛОРА” И ХАРАКТЕРНОМ ВРЕМЕНИ ЕГО РОСТА**

*Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Исследование физических закономерностей реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1, 2]. Однако несмотря на значительный интерес к этому феномену до сих пор не изучен физический механизм формирования “конусов Тейлора” – выступов на заряженной поверхности жидкости, образующихся на нелинейной стадии реализации ее неустойчивости, с вершин которых идет сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных капелек [1–4]. Качественная модель формирования таких выступов предложена еще в [5]. В [6] предпринята попытка их численного расчета, мало что давшая для понимания феномена. Но до сих пор никто не пытался построить “конус Тейлора” в рамках представлений о нелинейной эволюции мод капиллярных волн на неустойчивой по отношению к поверхностному заряду плоской поверхности жидкости и оценить характерное время его формирования. Этому вопросу и посвящено настоящее рассмотрение, проведенное по схеме, использовавшейся ранее при анализе нелинейных стадий развития сильно заряженной [7, 8] и незаряженной капелек в однородном внешнем электростатическом поле большой величины [9].

Пусть идеальная несжимаемая электропроводная жидкость с плотностью  $\rho$  заполняет в поле тяжести  $\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$  полупространство  $z \leq 0$  в декартовой системе координат ( $\vec{n}_z$  – орт оси  $z$ ), а ее невозмущенная волновым движением равновесная плоская поверхность (совпадающая с плоскостью  $XOY$ ) подвержена действию сил поверхностного натяжения с коэффициентом  $\gamma$  и несет однородно распределенный электрический заряд плотностью  $\sigma$ . Капиллярное волновое движение в жидкости, генерируемое уже тепловым движением ее молекул, будет приводить к деформации равновесной плоской свободной поверхности. При достаточно большой поверхностной плотности электрического заряда некоторые из тепловых капиллярных волн могут стать неустойчивыми и их амплитуды будут увеличиваться со временем.

В рамках линейной модели [10, 11] критические условия реализации неустойчивости такой поверхности определяются условием прохождения через ноль квадрата частоты виртуальной волны и условием обращения в ноль производной от частоты по волновому числу (условие экстремальности инкремента неустойчивости для данного волнового числа) имеют вид

$$W_* = \alpha k_* + (\alpha k_*)^{-1} = 2; \quad k_* = \alpha^{-1}. \quad (1)$$

где  $W$  – безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду:  $W = 4\pi\sigma^2 / \sqrt{\rho g \gamma}$ ;  $k$  – волновое число;  $\alpha$  – капиллярная постоянная жидкости:  $\alpha = \sqrt{\gamma / \rho g}$ .

Если при имеющемся на поверхности жидкости электрическом заряде величина параметра Тонкса–Френкеля будет больше, чем необходимо для реализации неустойчивости волны с  $k_* = \alpha^{-1}$ , то есть выполнится условие  $W > 2$ , то максимальным инкрементом неустойчивости будет обладать волна с волновым числом, определяющимся соотношением [10, 11]:

$$k_* = \left( W + \sqrt{W^2 - 3} \right) / (3 \cdot \alpha). \quad (1a)$$

Если задаться вопросом о расчете профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны, бегущей по плоской заряженной поверхности жидкости, то решая такую задачу в третьем порядке малости по амплитуде волны (считающейся малой по сравнению с капиллярной постоянной жидкости), можно найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде [12]

$$\begin{aligned}\xi &= a \cdot \cos \left[ k \cdot x - (\omega + a^2 \cdot \delta_2) \cdot t \right] + a^2 \cdot X_{22} \cdot \cos [2k \cdot x - 2\omega \cdot t] + \\ &\quad + a^3 \cdot X_{33} \cdot \cos [3kx - 3\omega \cdot t]; \quad (2) \\ \omega^2 &= kg(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha kW); \\ \delta_2 &= \frac{gk^3(16\alpha^2 k^2 W^2 - 16\alpha^3 k^3 W + 2\alpha^4 k^4 - 16\alpha kW + \alpha^2 k^2 + 8)}{16\omega(1 - 2\alpha^2 k^2)}; \\ X_{22} &= \frac{k(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha kW)}{2(1 - 2\alpha^2 k^2)}; \\ X_{33} &= \frac{k^2(6 - 32\alpha kW + 21\alpha^2 k^2 + 32\alpha^2 k^2 W^2 - 32\alpha^3 k^3 W + 6\alpha^4 k^4)}{16(1 - 2\alpha^2 k^2)(1 - 3\alpha^2 k^2)}.\end{aligned}$$

Наличие нелинейной поправки к частоте в третьем порядке по амплитуде волны (по малому параметру  $\varepsilon \equiv (a_0/\alpha)$  – отношению амплитуды волны  $a_0$  к капиллярной постоянной  $\alpha$  приводит к появлению зависимости критической величины параметра  $W$  от амплитуды волны  $a_0$  (от малого параметра  $\varepsilon$ ) [12]:

$$W_* \approx 2 - \beta \cdot \varepsilon^2 \equiv 2 - \beta \cdot (a_0/\alpha)^2; \quad \beta = 11/8. \quad (3)$$

Проследим эволюцию во времени капиллярно-гравитационной волны с  $k_* = \alpha^{-1}$ , потерявшей устойчивость при выполнении условия (1), то есть при  $W = W_* = 2$ , принимая во внимание то обстоятельство, что с ростом амплитуды волны критическое значение параметра  $W_*$  согласно (3) снижается, и пренебрегая на этом этапе зависимостью длины наиболее неустойчивой моды  $k_*$  от величины напряженности электрического поля у его поверхности.

Невозмущенная капиллярным волновым движением равновесная в поле силы тяжести и электростатических сил плоская заряженная поверхность жидкости при  $W = 2$  устойчива. Ее неустойчивость проявится, если на плоской поверхности жидкости появится виртуальная волна как угодно малой амплитуды  $a_0$ . В таком случае существующее значение параметра Тонкса–Френкеля  $W = 2$  согласно (3) для волны станет закритическим и согласно теории [5, 7–10] амплитуда этой волны начнет нарастать во времени по экспоненциальному закону  $a(t) = a_0 \cdot \exp(\chi \cdot t)$  с инкрементом  $\chi$ , пропорциональным корню квадратному из разности между существующим значением  $W = 2$  и критическим для виртуальной волны, определяемым по соотношению (3), то есть

$$\chi = (a_0/\alpha) \sqrt{(\beta \cdot g/\alpha)}. \quad (4)$$

Такой экспоненциальный рост с инкрементом, пропорциональным начальной амплитуде, будет обеспечен волне лишь на коротком интервале времени: пока прирост начальной амплитуды  $\Delta a$  не выйдет за пределы условия  $\Delta a \ll a_0$ . Затем в выражении для инкремента (4) следует заменить  $a_0$  на  $a_0 + \Delta a$  и рассмотреть экспоненциальный рост амплитуды на следующем коротком интервале времени и т.д. В итоге (детальные рассуждения вывода можно найти в работах [7–9], посвященных исследованию временной эволюции капель, неустойчивых по отношению к собственному либо поляризованному зарядам) для отыскания амплитуды неустойчивой волны получим нелинейное интегральное уравнение

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left( \int_0^t \frac{a(t)}{\alpha} \sqrt{\beta \frac{g}{\alpha}} \cdot dt \right),$$

решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (a_0/\alpha)\sqrt{\beta \cdot g/\alpha} \cdot t} \equiv \frac{a_0}{1 - \chi \cdot t} . \quad (5)$$

Из (5) несложно видеть, что характерное время реализации неустойчивости  $t_*$ , определяемое как характерное время неограниченного приближения к нулю знаменателя (5), полностью характеризуется инкрементом неустойчивости в начальный момент реализации неустойчивости  $t_* = \chi^{-1}$ , хотя весь процесс является существенно нелинейным. Отметим только, что смысл  $\chi$  в рассмотренном нелинейном росте амплитуды неустойчивой волны со временем и в экспоненциальном росте, характерном для линейной теории, различен: в линейной теории за время  $\chi^{-1}$  амплитуда волны увеличивается в  $\approx 2,73$  раза, а в рассмотренном нелинейном процессе за то же время амплитуда достигает бесконечно больших значений. То, что закон нарастания амплитуды волны со временем (5) обеспечивает большую скорость роста по сравнению с экспоненциальным, легко увидеть, раскладывая (5) и  $\exp(\chi t)$  при  $\chi t \ll 1$  по степеням  $\chi t$  и сравнивая их между собой.

Минимально возможное значение  $a_0$  определяется амплитудой капиллярных волн, порождаемых тепловым движением молекул жидкости  $a_0 \approx \sqrt{\kappa T/\gamma}$  ( $\kappa$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура жидкости). Амплитуда таких волн для подавляющего большинства реальных жидкостей при разумных (в смысле возможности существования жидкости) температурах будет иметь величину около половины ангстрема и, следовательно, характерное время развития неустойчивости будет весьма большим. Так, при  $a_0 = 10^{-8} \text{ м}$  характерное время реализации неустойчивости  $t_*$ , например, для заряженной поверхности воды, граничащей с вакуумом, приближается к восьми часам. С ростом начальной амплитуды  $a_0$  характерное время  $t_*$  уменьшается  $\sim a_0^{-1}$  и уже при  $a_0 \approx 10^{-3} \text{ м}$  измеряется единицами секунд. В итоге отмечаем, что для получения в экспериментах при  $W = W_* = 2$  характерных времен реализации неустойчивости, измеряемых секундами, необходимо виртуальные волны  $k \cdot \alpha = 1$ , с которых начинается неустойчивость, создавать искусственно.

Сказанное означает, что в экспериментах по проверке справедливости критерия неустойчивости заряженной поверхности жидкости [13, 14] характерное время ожидания реализации неустойчивости должно зависеть от способа задания виртуальной волны. Поскольку в работах [13, 14] это обстоятельство не упоминалось, остается предположить, что в экспериментах виртуальные волны возникали либо из-за теплового движения молекул, но тогда время ожидания реализации неустойчивости должно быть весьма большим, либо генерировались в результате случайных сотрясаний установки, а их амплитуда не контролировалась. Впрочем, в [3] имеется прямое указание на длительность линейной стадии подготовки разряда: так, там упоминается, что примерно из 15 м киноплёнки, на которую фиксировался эксперимент с момента подачи напряжения, сам акт выброса струйки жидкости при реализации неустойчивости зафиксирован лишь на одном кадре. В [14] о времени задержки разряда вообще не упоминается. Есть еще одно возможное объяснение: в экспериментах [13, 14] использовалось напряжение, превышавшее критическое, и эксперимент происходил при наличии за критичности параметра Тонкса–Френкеля  $\Delta W$  по сравнению с критическим значением  $W = W_* = 2$ , определяемым (1), что и сказалось на величине характерного времени реализации неустойчивости.

Пусть в начальный момент времени величина параметра Тонкса–Френкеля превышает критическую для плоской поверхности жидкости на  $\Delta W$  и равна  $W_* + \Delta W$ . В такой ситуации величина инкремента неустойчивости в начальный момент ее реализации будет зависеть как от величины начальной амплитуды виртуальной волны  $a_0$ , так и от степени за критичности  $\Delta W$  и в соответствии с традиционными представлениями [1, 7–10] задается соотношением

$$\chi = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[ \Delta W + \beta \left( \frac{a_0}{\alpha} \right)^2 \right]} .$$

Зависимость же амплитуды неустойчивой волны от времени определится как решение нелинейного интегрального уравнения

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left( \int_0^t \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[ \Delta W + \beta \left( \frac{a(t)}{\alpha} \right)^2 \right]} \cdot dt \right) ,$$

решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{2 \cdot \exp(\sqrt{g \cdot \Delta W / \alpha} \cdot t) \cdot (1 + \delta)}{(1 + \delta)^2 - (a_0 / \alpha)^2 \cdot \exp(2 \cdot \sqrt{g \cdot (\Delta W / \alpha)} \cdot t)}; \quad \delta \equiv \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\Delta W}\right) \cdot \left(\frac{a_0}{\alpha}\right)^2\right)}. \quad (6)$$

Характерное время реализации неустойчивости, определяемое данной зависимостью, получается из условия обращения в ноль знаменателя  $a(t)$  в виде

$$t_* = \sqrt{(\alpha / g \cdot \Delta W)} \cdot \ln[\delta \cdot (\alpha / a_0)]. \quad (7)$$

Из (7) видно, что основной вклад в величину характерного времени реализации неустойчивости дает закритичность параметра Тонкса–Френкеля  $\Delta W$ , а влияние величины начальной амплитуды виртуальной волны  $a_0$  более слабо (см. рис.1). Принимая во внимание, что величина капиллярной постоянной  $\alpha$  для большинства жидкостей измеряется единицами миллиметров, из (7) несложно найти, что уже при  $\Delta W \approx 10^{-3}$  независимо от величины  $a_0$  характерное время реализации неустойчивости будет измеряться секундами. Применительно к экспериментам [13, 14] сказанное позволяет предположить, что в обоих случаях измерения проводились при определяющем влиянии на характерное время реализации неустойчивости закритичности параметра Тонкса–Френкеля.

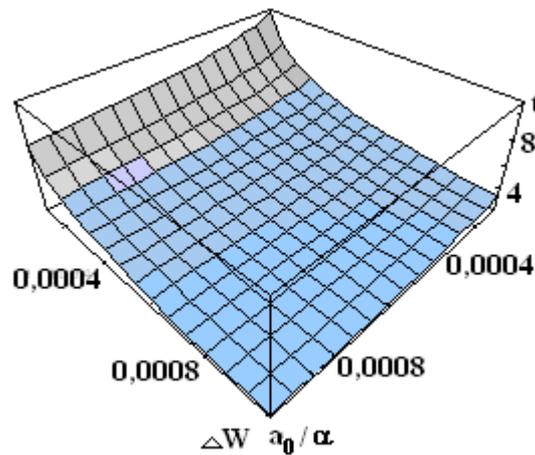


Рис. 1. Зависимость характерного времени реализации неустойчивости  $t_*$  от величины начальной амплитуды волны  $a_0$  при ее изменении от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$  см и степени закритичности параметра Тонкса–Френкеля  $\Delta W$ , изменяющейся от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$

Интересно отметить, что при рассмотрении закономерностей реализации неустойчивости капель по отношению к собственному и индуцированному зарядам [7–9] зависимость характерного времени реализации неустойчивости от амплитуды начального возмущения равновесной формы капли  $\zeta_0 \cdot P_2(\cos \theta)$  (здесь  $P_2(\cos \theta)$  – полином Лежандра) маскируется его сильной зависимостью от радиуса капли  $R$ , имеющей вид  $t_* \sim (R^4 / \zeta_0)$ . При  $R \approx 10^{-2}$  см (а именно для капель таких размеров проводились экспериментальные исследования их устойчивости по отношению к поверхностному заряду [2]) и  $\zeta_0 \approx 10^{-8} \text{ мВ}$  получим  $(R^4 / \zeta_0) \approx 1$ . Поэтому обнаруженная в проведенном рассмотрении сильная зависимость характерного времени развития неустойчивости от величины начальной амплитуды на пороге критичности параметра Тонкса–Френкеля свойственна именно плоской заряженной поверхности жидкости.

Обратим внимание на то, что с увеличением амплитуды неустойчивой волны, нарастающей со временем по закону (6) или (5), локальная плотность электрического заряда, а с ней и локальная величина параметра Тонкса–Френкеля на свободной поверхности жидкости в местах с возросшей кривизной также будут расти. Следовательно, согласно (1а) с увеличением амплитуды волны будет расти и величина волнового числа наиболее неустойчивой волны: то есть на вершине растущей волны с  $k = \alpha^{-1}$  будут по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда претерпевать не-

устойчивость все более короткие волны. В итоге форма эмиссионного выступа (форма конуса Тейлора) определится суперпозицией всех волн, претерпевших неустойчивость.

Следует, однако, отметить, что сказанное выше относится к локальным значениям поверхностной плотности заряда, параметра Тонкса–Френкеля и волнового числа, а «локальность» для волны подразумевает характерный линейный размер пространства, в котором можно говорить о локальности порядка половины длины волны. Теория реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости при непрерывно изменяющейся от точки к точке поверхностной плотности заряда пока не разработана. В этой связи в нижеследующих рассуждениях будем оперировать усредненными по полупериоду волны с  $k = \alpha^{-1}$  значениями параметра Тонкса–Френкеля и именно по ним находить согласно (1а) величины волновых чисел наиболее неустойчивых волн.

Итак, зададимся целью проследить закономерности пространственного формирования конуса Тейлора, принимая, что в начальный момент времени при  $W = 2$  претерпела неустойчивость волна с волновым числом  $k = \alpha^{-1}$  и ее амплитуда нарастает по закону (6).

Выражение для величины параметра Тонкса–Френкеля как функции времени и координаты свободной поверхности волны с  $k = \alpha^{-1}$ , если ограничиться только главным слагаемым в (2), то есть

$$\xi \approx a \cdot \cos \left[ k \cdot x - (\omega + a^2 \cdot \delta_2) \cdot t \right], \quad (8)$$

легко находится и имеет вид [15]

$$W = W_0 \left( 1 + 2a \cdot k \cdot \cos \left( k \cdot x - (\omega - a^2 \cdot \delta_2) \cdot t \right) \right),$$

где  $W_0$  – величина параметра  $W$  у невозмущенной капиллярным волновым движением плоской равновесной поверхности жидкости, когда квадрат частоты волны  $z^2 = (\omega - a^2 \cdot \delta_2)^2$  проходит через ноль и волна претерпевает неустойчивость. При этом зависимость  $W$  от координаты определится соотношением

$$W = W_0 \left( 1 + 2a \cdot k \cdot \cos(k \cdot x) \right) = W_0 \left( 1 + 2\varepsilon \cdot (k \cdot \alpha) \cdot \cos(k \cdot x) \right), \quad (9)$$

а зависимость  $W$  от времени определится через  $a = a(t)$ . Усредняя (9) по половине длины волны с  $k = \alpha^{-1}$ , получим

$$\overline{W} = W_0 \cdot (1 + 1,27 \cdot \varepsilon).$$

Подставляя это соотношение в (1а), найдем зависимость волнового числа наиболее неустойчивой волны от ее амплитуды (от  $\varepsilon$ ):

$$k_* = \alpha^{-1} (1 + 2,54 \cdot \varepsilon - 3,29 \cdot \varepsilon^2) \equiv k_0 \left( 1 + 2,54 \cdot \left( \frac{a}{\alpha} \right) - 3,29 \cdot \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 \right). \quad (10)$$

Подставим это выражение в (8) и полагая, что с начала потери волной устойчивости и во все последующие моменты времени квадрат частоты равен нулю (то есть  $(\omega - a^2 \cdot \delta_2)^2 = 0$ ), а зависимость амплитуды волны от времени определяется соотношением (5), получим

$$\xi \approx a(t) \cdot \cos \left[ \left( 1 + 2,54 \cdot \frac{a(t)}{\alpha} - 3,29 \cdot \left( \frac{a(t)}{\alpha} \right)^2 \right) \cdot \left( \frac{x}{\alpha} \right) \right] \equiv a(t) \cdot \cos \left[ k(a(t)) \cdot x \right]; \quad (11)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (a_0/\alpha) \sqrt{\beta \cdot g/\alpha} \cdot t}.$$

Из этого выражения видно, что от времени зависит и амплитуда эмиссионного выступа и его характерный поперечный размер. Рассмотрим эволюцию во времени выступа на поверхности жидкости, описываемого соотношением (11).

В начальный момент времени, при  $t = 0$ , будем иметь

$$\xi = a_0 \cdot \cos \left[ x/\alpha \right] \equiv a_0 \cdot \cos \left[ k_0 \cdot x \right].$$

По прошествии малого интервала времени  $\Delta t_1$  форма выступа изменится:

$$\xi_1 = a_0 \cdot \cos \left[ x/\alpha \right] + \frac{da}{dt} \cdot \Delta t_1 \cdot \cos \left[ \left( k_0 + \frac{dk}{dt} \cdot \Delta t_1 \right) \cdot x \right].$$

По прошествии следующего малого интервала времени  $\Delta t_2$  она изменится еще больше:

$$\xi_2 = a_0 \cdot \cos\left[\frac{x}{\alpha}\right] + \frac{da}{dt} \Delta t_1 \cdot \cos\left[\left(k_0 + \frac{dk}{dt} \Delta t_1\right)x\right] + \frac{da}{dt} \Delta t_2 \cdot \cos\left[\left(k_0 + \frac{dk}{dt} \Delta t_1 + \frac{dk}{dt} \Delta t_2\right)x\right].$$

Повторяя проведенную процедуру  $n$  раз, получим

$$\xi_n = a_0 \cdot \cos\left[x/\alpha\right] + \sum_{j=1}^n \left( \frac{da}{dt} \cdot \Delta t_j \cdot \cos\left[\left(k_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{dk}{dt} \cdot \Delta t_j\right)\right) \cdot x\right] \right).$$

В пределе  $n \rightarrow \infty$  суммирование в этом соотношении можно заменить интегрированием:

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 \cdot \cos\left[x/\alpha\right] + \int_{a_0}^a \left( \frac{da}{dt} \cdot \cos\left[\left(k_0 + \int_{k_0}^k \left(\frac{dk}{dt} \cdot dt\right)\right) \cdot x\right] \cdot dt \right) \equiv \\ &\equiv a_0 \cdot \cos\left[x/\alpha\right] + \int_{a_0}^a \left( \frac{da}{dt} \cdot \cos\left[k(a(t)) \cdot x\right] \cdot dt \right) \equiv a_0 \cdot \cos\left[x/\alpha\right] + \int_{a_0}^a \left( \cos\left[k(a) \cdot x\right] \cdot da \right). \end{aligned}$$

Подставляя в это соотношение выражение  $k = k(a)$  из (10) и интегрируя по  $a$ , получим

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 \cdot \cos\left[x/\alpha\right] + \frac{0,69 \cdot \alpha}{\sqrt{x/\alpha}} \cdot \left\{ \cos\left(1,49 \cdot \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left[ C\left[0,22 \cdot \sqrt{x/\alpha} \left(-2,54 + 6,58 \left(\frac{a}{\alpha}\right)\right)\right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(1,49 \cdot \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left[ S\left[0,22 \cdot \sqrt{x/\alpha} \left(-2,54 + 6,58 \left(\frac{a}{\alpha}\right)\right)\right] \right] \right\} \Big|_{a_0}^a \end{aligned} \quad (12)$$

В этом соотношении  $C[z]$  и  $S[z]$  – интегралы Френеля [16].

На рис.2 кривой 1 представлена зависимость  $\xi = \xi(x)$ , рассчитанная при  $a = 0,25\alpha$ , кривой 2 зависимость:  $\xi = a \cdot \cos(x/\alpha)$  при  $a = 0,25\alpha$ . Несложно видеть, что при равенстве амплитудных значений обеих кривых зависимость (12) дает заметно большую кривизну вершины по сравнению с обычной косинусоидой.

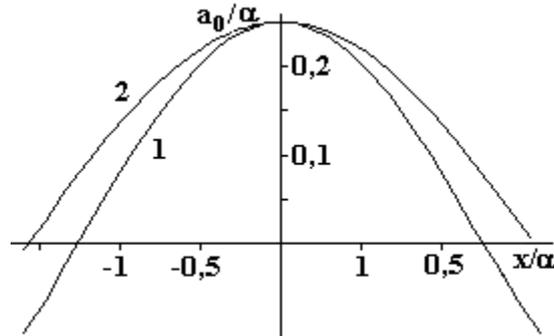


Рис. 2. Форма образующей эмиссионного выступа, рассчитанная по (12), дается внутренней кривой. Для сравнения приведена зависимость  $\xi = a \cdot \cos(x/\alpha)$  (наружная кривая)

Напомним, что расчеты основаны на учете лишь главного члена разложения (2). Если учесть и добавки различных порядков малости, то кривизна вершины эмиссионного выступа еще больше увеличится и, кроме того, увеличится его амплитуда. Однако такое исследование существенно более громоздко по сравнению с проведенным и нуждается в отдельном рассмотрении.

Характерное время реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости  $t_*$  определяется начальной амплитудой  $a_0$  виртуальной волны, с которой начинается неустойчивость, и степенью превышения параметром Тонкса–Френкеля критического для волны данной длины значения (то есть закритичностью  $\Delta W$ ). Влияние закритичности  $\Delta W$  на величину  $t_*$  при  $\Delta W \neq 0$  является преобладающим. При  $\Delta W = 0$  характерное время  $t_*$  обратно пропорционально  $a_0$  и при достаточно малых  $a_0$  может достигать весьма больших величин в силу медленности нарастания амплитуды на линейной стадии неустойчивости. Так, если виртуальная

волна порождается тепловым движением молекул жидкости и  $a_0 \approx 10^{-8} \text{ м}^2$ , то  $t_*$ , например, для воды приближается к восьми часам.

Учет зависимости волнового числа наиболее неустойчивой моды от величины напряженности электрического поля у заряженной поверхности жидкости приводит к искажению формы растущего на неустойчивой поверхности жидкости эмиссионного выступа (конуса Тейлора) по сравнению с чисто косинусоидальным в сторону увеличения кривизны его вершины.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760 и гранта Президента РФ № МК 929.2003.01.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Габович М.Д. Жидкометаллические источники ионов // УФН. 1983. Т. 140. №.1. С. 137–151.
2. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
3. Taylor G.I. Disintegration of water drop in an electric field // Proc. Roy. Soc. London, 1964. V. 280A. P. 383–397.
4. Шевченко С.И. О потенциале образования конусного мениска на поверхности проводящей жидкости в электрическом поле // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 2. С. 54–58.
5. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by uniform electric field // Phys. Rev. 1936. V. 48. P. 562–571.
6. Allen J.E. A note on the Taylor cone // J. Phys. D: Appl. Phys. 1985. V. 18. P. 59–62.
7. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной капли // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
8. Ширяева С.О. Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной маловязкой капли // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
9. Григорьев А.И. Об инкременте неустойчивости заряженной капли в однородном электростатическом поле // Там же. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.
10. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
11. Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 15–22.
12. Белоножко Д.Ф., Климов А.В., Григорьев А.И. О нелинейных поправках к частоте капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости и к критическим условиям реализации ее неустойчивости // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 24. С. 41–45.
13. Taylor G.I., McIwan A.D. The stability of a horizontal fluid interface in vertical electric field // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Part. 1. P. 1–15.
14. Шутов А.А. Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость–вакуум // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 126–130.
15. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О нелинейных капиллярно-гравитационных волнах на заряженной поверхности идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1968.

Поступила 05.01.04

## Summary

Nonlinear integral equation for time evolution of nonlinear unstable wave amplitude on the plane surface of ideal noncompressible liquid is derived and solved. It was found out that characteristic time of instability realization is defined by the initial amplitude of a virtual wave from which the instability is started and by the value of Tonks-Frenkel parameter.