

# О критериях электростатической неустойчивости поверхности жидкости при однородном и неоднородном распределении плотности заряда

А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)

На основе аналитических решений классических задач (по аналогии с ними, но качественными методами) выводятся критерии реализации неустойчивости свободной поверхности электропроводной жидкости для различных ее геометрий при однородном и неоднородном распределении поверхностной плотности индуцированного внешним электростатическим полем или собственного заряда. Найденны критерии неустойчивости заряженной струи, заряженной сфероидальной капли, а также плоской поверхности проводящей жидкости в неоднородном электростатическом поле точечного заряда, тонкого заряженного стержня, диполя.

*Ключевые слова:* плоская поверхность, сфероидальная капля, струя, электростатическое поле, заряд, критерий неустойчивости.

УДК 532.62:532.592: 530.18: 534.1:541.24:621.319.7

## ВВЕДЕНИЕ

В работе обсуждаются закономерности и критерии основных неустойчивостей однородно заряженной поверхности электропроводной идеальной несжимаемой жидкости для различных геометрий поверхностей. В частности, это плоская поверхность (неустойчивость Тонкса-Френкеля), поверхность сферической капли (неустойчивость Рэлея), поверхность цилиндрической струи (специального названия нет). Все указанные виды неустойчивости имеют критерии возникновения, качественно сходные, но количественно различающиеся. На основе известных закономерностей на качественном уровне можно вывести аналогичные критерии и в случае неоднородного распределения заряда по ее поверхности. Это, например, капля во внешнем однородном электростатическом поле (неустойчивость Тейлора) или просто сфероидальная сильно заряженная капля. Кроме того, это случаи неустойчивости плоской поверхности жидкости в различных электростатических полях: точечного заряда, электрического диполя; заряженного стержня. Следует отметить, что неустойчивость капли во внешнем однородном электростатическом поле исследовалась и экспериментально, и численно. Остальные виды неустойчивости неоднородно заряженной поверхности проводящей жидкости не исследованы.

### 1. ОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ПЛОСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ОРТОГОНАЛЬНОМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Пусть имеется плоская поверхность идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверх-

ностного натяжения свободной поверхности  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ , контактирующая с вакуумом, в котором создано однородное электростатическое поле  $\vec{E}_0$ , перпендикулярное жидкой поверхности. Задача состоит в нахождении критерия электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости.

В работе Тонкса [1] впервые заложена умозрительно-качественная основа физического подхода к изучению этой неустойчивости, однако она представляет чисто качественный интерес. Поэтому остановимся на работе Френкеля [2], где математически строго выведен искомый критерий неустойчивости в виде

$$w \equiv \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \sigma}} \geq 2; \quad (1)$$

здесь  $w$  – безразмерный параметр, характеризующий устойчивость плоской поверхности жидкости по отношению к индуцированному заряду;  $g$  – ускорение свободного падения. Этот критерий впоследствии подтвердили экспериментально [3–4] и были определены физические закономерности неустойчивости Тонкса-Френкеля [5].

Введя понятие капиллярной постоянной жидкости  $\alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$ , путем перехода от напряженности поля  $E_0$  к поверхностной плотности заряда  $\kappa$  на основе соотношения  $E_0 = 4\pi\kappa$  получим условие для критической поверхностной плотности заряда:

$$\kappa \geq \sqrt{\frac{0,5 \cdot \sigma}{\pi \cdot \alpha}}. \quad (2)$$

В безразмерных переменных, в которых  $g = \rho = \sigma = 1$ , этот критерий примет вид

$$\kappa \geq \frac{0,707}{\sqrt{\pi}}. \quad (3)$$

Выведем тот же критерий, сравнивая давления: электростатическое и капиллярное. Точнее, найдём отношение электростатического давления к капиллярному под виртуальным полусферическим выступом  $P_\sigma \equiv 2\sigma/R$ , как это было предложено Тонксом [1], и примем это отношение равным единице или больше нее. В качестве характерного радиуса выступа примем капиллярную постоянную. Тогда рассматриваемое отношение примет вид

$$\frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{\alpha}{2\sigma} \geq 1.$$

Или с учетом  $E_0 = 4\pi\kappa$ :

$$\kappa \geq \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\alpha}}.$$

В безразмерных переменных

$$\kappa \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Получено завышенное значение поверхностной плотности заряда по сравнению с точным (3). Чтобы было практически точное значение (3), нужно отношение давлений приравнять к 0,5. При этом для поверхностной плотности заряда имеем почти такое же выражение, как при точном расчёте.

Возникает вопрос, почему в теории принимается виртуальный полусферический выступ? Потому что из феноменологии явления известно [3–4], что при развитии неустойчивости на плоской поверхности сначала появляются выступы, называемые «конусами Тейлора», которые на финальной стадии становятся коническими, но на начальной стадии их можно моделировать сплюснутыми полусфероидами или полусферами. Развитие выступа в полусферу идёт через стадии сплюснутых сфероидальных форм, капиллярное давление под которыми меньше, чем под полусферическим выступом. Если взять полуцилиндрический виртуальный выступ, то результаты расчета, аналогичного предыдущему, совпадут с результатами точного расчёта [2].

## 2. НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ТОЧЕЧНЫЙ ЗАРЯД НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Пусть имеется плоская поверхность идеально проводящей жидкости, совпадающая с плоскостью  $z = 0$  декартовой системы координат, с коэффициентом поверхностного натяжения сво-

бодной поверхности  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ , контактирующая с вакуумом. При  $z = h$  находится точечный заряд  $q$ . Задача состоит в нахождении критерия электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости.

Распределение плотности индуцированного заряда по поверхности жидкости в данном случае будет обладать осевой симметрией и иметь вид [6, стр. 97]:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q \cdot h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}; \quad (4)$$

где  $r$  – радиальная координата на свободной поверхности жидкости в цилиндрической системе с началом отсчета от основания перпендикуляра, опущенного на поверхность жидкости из заряда.

Непосредственно под точечным зарядом (при  $r = 0$ ) получим

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{h^2}. \quad (5)$$

Электростатическое давление на поверхность жидкости будет следующим:

$$\begin{aligned} P_E &\equiv \frac{(4\pi\kappa)}{8\pi} \equiv \\ &\equiv 2\pi \left( -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q \cdot h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \right)^2 \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{(q \cdot h)^2}{(h^2 + r^2)^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим  $r = \alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$ , то есть найдем электростатическое давление на окружности радиусом в капиллярную постоянную. Найдем теперь отношение определенного таким образом электростатического давления к капиллярному под виртуальным полусферическим выступом радиусом в капиллярную постоянную:  $P_\sigma \equiv 2\sigma/\alpha$ , как это было выполнено выше, в предыдущем разделе, и приравняем его к одной второй:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(q \cdot h)^2}{(h^2 + \alpha^2)^3} \cdot \frac{\alpha}{2\sigma} = \frac{1}{2}.$$

Или, подставив сюда значение капиллярной постоянной, получим:

$$\frac{q^2}{4\pi h^4 \sqrt{\sigma \rho g}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma/\rho g}{h^2}\right)^3} = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Положим  $\sigma/\rho g \ll h^2$  и запишем:

$$w_* \equiv \frac{E_*^2 \alpha}{4\pi\sigma} \approx \frac{1}{2} \left(1 + 3 \cdot \frac{\sigma/\rho g}{h^2}\right), \quad (8)$$

где  $E_* \equiv q/h^2$  – напряженность электростатического поля точечного заряда на поверхности жидкости непосредственно под ним, а капилляр-

ная постоянная определена выше. Таким образом, критическое условие получается более слабым, чем (1). Если изначально ориентироваться на давление электростатического поля непосредственно под каплей, то выведенное выше условие запишется без множителя  $(1 + 3\sigma/\rho gh^2)$ :

$$w_* \equiv \frac{E_*^2 a}{4\pi\sigma} \approx \frac{1}{2}.$$

### 3. НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ЗАРЯЖЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Пусть имеется плоская поверхность идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ , контактирующая с вакуумом. Над жидкостью перпендикулярно к ее поверхности помещен тонкий однородный стержень длиной  $2l$ , заряженный с линейной плотностью заряда  $\chi$  так, что его центр масс находится на расстоянии  $z = h + l$  от поверхности. Задача состоит в нахождении критерия электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости.

Следует отметить, что в [7] для изучения закономерностей электростатического распада капли использовалось электростатическое поле, созданное в аналогичной системе электродов: прямая проволока в качестве одного электрода и плоская металлическая пластина в качестве другого. Такая же система электродов использовалась в экспериментах по исследованию устойчивости плоской поверхности жидкости в [8–9].

Электростатический потенциал в окрестности такого стержня, если центр цилиндрической системы координат находится в его центре масс, равен [6, стр. 58]:

$$\varphi(\vec{R}) = \chi \cdot \ln \left| \frac{z+l+\sqrt{r^2+(z+l)^2}}{z-l+\sqrt{r^2+(z-l)^2}} \right|,$$

где  $r$  – радиальная цилиндрическая координата;  $R = \sqrt{r^2+z^2}$  – модуль радиус-вектора. При  $r \rightarrow \infty$  или при  $z \rightarrow \infty$  (то же, что  $h \rightarrow \infty$ ) и конечной длине стержня это выражение стремится к выражению для потенциала точечного заряда (как показано в [6, стр. 58]).

Поверхностную плотность индуцированного заряда на поверхности идеально проводящей жидкости найдём по обычной формуле и удвоим с учетом электростатического изображения заряженного стержня в плоской поверхности идеально проводящей жидкости [10, стр. 308]:

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv -\frac{2}{4\pi} \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{z=h+l} = -\frac{\chi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left| \frac{z+l+\sqrt{r^2+(z+l)^2}}{z-l+\sqrt{r^2+(z-l)^2}} \right| \Big|_{z=h+l} = \\ &= -\frac{\chi}{2\pi} \frac{d}{dn} \left\{ \ln \left| z+l+\sqrt{r^2+(z+l)^2} \right| - \ln \left| z-l+\sqrt{r^2+(z-l)^2} \right| \right\} \Big|_{z=h+l} = \\ &= \frac{\chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+(h+2l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $r = 0$  (то есть непосредственно под стержнем) получим

$$\kappa = -\frac{\chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{h} - \frac{1}{(h+2l)} \right\} \equiv -\frac{\chi}{2\pi} \frac{2l}{h(h+2l)} \equiv -\frac{q}{2\pi h(h+2l)},$$

где  $q = 2l\chi$ . При  $2l \ll h$  это выражение перепишем в виде

$$\kappa \equiv -\frac{q}{2\pi h(h+2l)} \approx -\frac{q}{2\pi h^2} \left( 1 - \frac{2l}{h} \right).$$

По сравнению с поверхностной плотностью заряда (5), порожденного точечным зарядом, расположенным на расстоянии  $h$  от плоскости, вычисленное значение  $\kappa$  оказывается меньше на величину

$$\Delta\kappa \equiv \frac{q}{\pi h^2} \frac{l}{h}.$$

В частности, это означает, что потенциал заряженного стержня убывает с расстоянием медленнее, чем потенциал электростатического поля точечного заряда. Интенсивность поля будет убывать тем быстрее, чем больше отношение длины стержня к расстоянию до поверхности жидкости.

Электростатическое давление на поверхность жидкости согласно (9) будет следующим:

$$P_E \equiv \frac{(4\pi\kappa)^2}{8\pi} = \frac{\chi^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+(h+2l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \right\}^2.$$

Так же как и выше, положив  $r = \alpha$ , найдем отношение электростатического давления на окружности радиусом в капиллярную постоянную и капиллярного под виртуальным полусферическим выступом тем же радиусом и приравняем его к одной второй:

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{E_+^2 a}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2l}{h}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{h^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{h^2}}} \right\}^2 = \frac{1}{2},$$

где  $E_+ \equiv \chi/h$ . При  $2l \ll h$  и  $\sigma/\rho g \ll h^2$ , когда  $2l \gg \sqrt{\sigma/\rho g}$ ,

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{E_+^2 a}{4\pi\sigma} \frac{l^2}{h^2} \left[ 1 + \frac{l}{h} + \frac{l^2}{4h^2} \right] = \frac{1}{2}$$

или, учитывая явный вид  $E_+ \equiv \chi/h$ , получим

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{q^2 \alpha}{16\pi h^4 \sigma} \left[ 1 + \frac{l}{h} + \frac{l^2}{4h^2} \right] = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_*^2 \alpha}{4\pi \sigma} \left[ 1 + \frac{l}{h} + \frac{l^2}{4h^2} \right] = \frac{1}{8} \Rightarrow w_* \left[ 1 + \frac{l}{2h} \right]^2 = \frac{1}{8},$$

где  $q = 2l\chi$  – полный заряд стержня;  $E_* = q/h^2$ ;

$w_* \equiv \frac{E_*^2 \alpha}{4\pi \sigma}$ . В других обозначениях

$$w_* \geq \frac{1}{8} \left[ 1 - \frac{l}{4h} \right].$$

#### 4. НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ТОЧЕЧНЫЙ ДИПОЛЬ НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Пусть имеется плоская поверхность идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и массовой плотностью  $\rho$ , контактирующая с вакуумом. При  $z = h$  находится точечный диполь  $\vec{p}$ , перпендикулярный к поверхности жидкости. Задача состоит в нахождении критерия электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости.

Потенциал электростатического поля диполя в системе координат, связанной с его центром,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \equiv \frac{p \cdot \cos \mathcal{G}}{r^2} \equiv \frac{p \cdot \cos \mathcal{G}}{z^2 + R^2} \equiv \frac{p \cdot z}{(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

где угол  $\mathcal{G}$  отсчитывается от направления диполя;  $R$  и  $z$  – цилиндрические координаты;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения, а  $r$  – его величина. Распределение плотности индуцированного электрического заряда на поверхности жидкости найдём по обычной формуле и удвоим результат с учетом электростатического изображения диполя:

$$\kappa(\vec{r}) \equiv \frac{2}{4\pi} \left| \nabla \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right| \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{3\vec{n}_r (\vec{p} \cdot \vec{n}_r) - \vec{p}}{r^3} \right|,$$

где  $\vec{n}_r \equiv \vec{r}/r$ . Тогда электростатическое давление на поверхность жидкости будет иметь вид [11, стр. 22–23]:

$$P_E \equiv \frac{(4\pi\kappa)^2}{8\pi} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{p^2 (3z^2 + r^2)}{r^8}.$$

Так же как в предыдущих разделах, положим  $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ ,  $z = h$  и  $R = \alpha \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$  – и найдём то же отношение давлений:

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{p^2 (3z^2 + r^2) \cdot \alpha}{r^8 \cdot 2\sigma} \equiv \frac{p^2 (4h^2 + \alpha^2) \cdot \alpha}{4\pi \sigma (h^2 + \alpha^2)^4} \equiv$$

$$\equiv \frac{E_p^2}{4\pi \sqrt{\sigma \rho g}} \geq \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{15}{4} \frac{\alpha^2}{h^2} \right),$$

где  $E_p \equiv p/h^3$ .

#### 5. НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ЗАРЯЖЕННАЯ СФЕРОИДАЛЬНАЯ КАПЛЯ

В IX веке Рэлей теоретически вывел критерий электростатической неустойчивости сильно заряженной сферической капли [12–13], который имел вид

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi \sigma R^3} \geq 1,$$

где  $W$  – безразмерный параметр;  $Q$  и  $R$  – заряд и радиус капли соответственно. Этот критерий неоднократно проверялся экспериментально [14–15] и теоретически [16]. Задача выяснения закономерностей реализации неустойчивости незаряженной капли в однородном электростатическом поле, строгий теоретический анализ которой осложнен из-за неоднородного распределения индуцированного заряда по поверхности капли, решалась в основном экспериментальными и численными [17–20] или качественными [21] методами. Качественными методами (по аналогии с тем, как это делалось в [21]) должна решаться и проблема нахождения критических условий неустойчивости заряженной сфероидальной капли.

Данная задача может решаться в двух вариантах.

1. В начальный момент времени задается сферическая капля идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , имеющая радиус  $R$  и заряд  $Q$ . Эта капля виртуальным образом (под действием сил неопределённой природы) принимает вытянутую сфероидальную форму. Требуется определить условия, при выполнении которых капля станет неустойчивой.

2. В начальный момент времени задается капля идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , имеющая форму вытянутого сфероида (равновеликого по объёму сферической капле радиуса  $R$ ) и заряд  $Q$ . В качестве характерного линейного размера задается радиус кривизны вершины капли  $R_{кр}$ . Требуется определить условия, при выполнении которых капля станет неустойчивой.

Чтобы определить эти условия, необходимо: найти комбинацию заданных физических параметров, складывающихся в некий безразмерный параметр, в который собираются заданные в начальный момент времени физические величины; при превышении некой постоянной величины реализуется неустойчивость.

В первом варианте выпишем выражение для поверхностной плотности заряда на вершинах

заряженного эллипсоида [22, стр. 41] применительно к вытянутому сфероиду, имея в виду определение электростатического давления собственного заряда капли:

$$\kappa_q = \frac{Q}{4\pi b^2} \equiv \frac{Q}{4\pi R^2 (1-e^2)^{1/3}}.$$

Для электростатического давления собственного заряда на вершины сфероида получим

$$\begin{aligned} P_E &\equiv \frac{E^2}{8\pi} \equiv \frac{16\pi^2 \kappa_q^2}{8\pi} \equiv 2\pi \kappa_q^2 \equiv \\ &\equiv 2\pi \left( \frac{Q}{4\pi R^2 (1-e^2)^{1/3}} \right)^2 \equiv \frac{Q^2}{8\pi R^4 (1-e^2)^{2/3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнявая к единице отношение электростатического и капиллярного давлений на вершинах вытянутой сфероидальной капли, находим критерий реализации неустойчивости капли в электростатическом поле. Учитываем, что капиллярное давление на вершинах сфероида определяется выражением  $2\sigma/R_{кр}$ , где  $R_{кр} \equiv (b^2/a)$  – радиус кривизны [23, стр. 319],  $a$  и  $b$  – большая и меньшая полуоси сфероида:  $a = R(1-e^2)^{-1/3}$ ,  $b = R(1-e^2)^{1/6}$ . В итоге получаем

$$P_E \equiv \frac{2\sigma}{R_{кр}} \equiv \frac{2\sigma}{R \cdot (1-e^2)^{2/3}}. \quad (11)$$

Найдем отношение  $P_E$  к  $P_\sigma$  и, приравняв его к единице, определим критерий реализации неустойчивости:

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{\frac{Q^2}{8\pi R^4 (1-e^2)^{2/3}}}{\frac{2\sigma}{R \cdot (1-e^2)^{2/3}}} \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} \equiv W \geq 1.$$

Таким образом, критерий реализации неустойчивости в разобранным случае получается таким же, как в случае заряженной сферической капли.

Во втором случае, детально разобранным в [24] из качественно иных соображений, критерий реализации неустойчивости должен быть выражен через  $\sigma$ ,  $Q$  и  $R_{кр}$ . Давление электростатического поля на вершины сфероидальной капли определится выражением (10), а давление капиллярных сил на них в отличие от (11) запишется как

$$P_\sigma \equiv \frac{2\sigma}{R_{кр}}.$$

Найдя отношение  $P_E$  к  $P_\sigma$  и приравняв его к единице, вычислим критерий реализации неустойчивости в виде

$$\frac{P_E}{P_\sigma} \equiv \frac{\frac{Q^2}{8\pi R^4 (1-e^2)^{2/3}}}{\frac{2\sigma}{R_{кр}}} \equiv \frac{Q^2 R_{кр}}{16\pi\sigma R^3} \equiv W_* \geq (1-e^2)^{2/3}.$$

Зависимость  $W_*(e^2) = (1-e^2)^{2/3}$ , приведенная на рис. 1, качественно и количественно аналогична критической зависимости параметра  $W$  от  $e^2$  для основной моды осцилляций сфероидальной капли, построенной в [24] из других соображений.

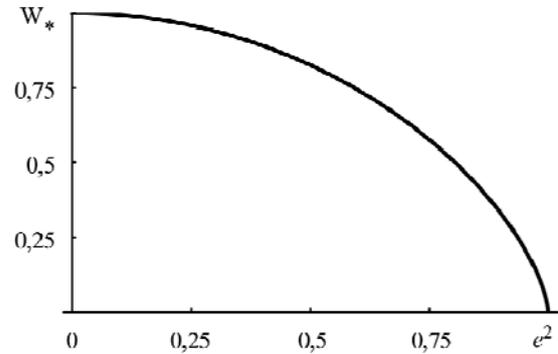


Рис. 1. Зависимость  $W_*$  от квадрата эксцентриситета для заряженной сфероидальной капли.

## 6. ОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТРУЯ

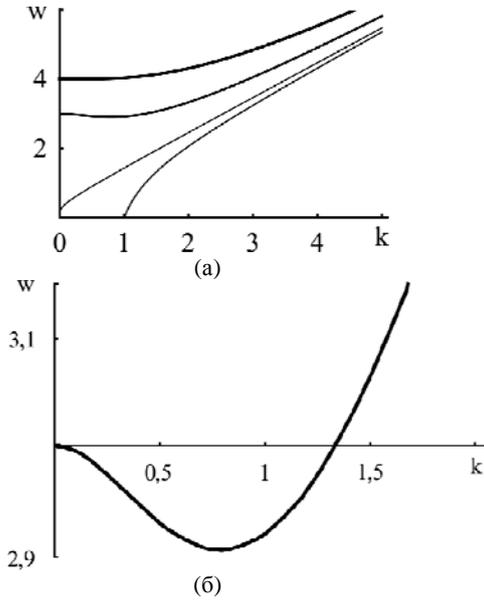
Общие закономерности реализации электростатической неустойчивости струи изложены в [25–26]. В отличие от двух предыдущих физических объектов струя неустойчива даже при отсутствии на ней заряда: она разбивается на отдельные капли под действием чисто капиллярных сил. Давление электрического поля действует в направлении, противоположном давлению капиллярных сил. При небольшом заряде оно стабилизирует струю. Волны на последней подразделяются по модам в зависимости от симметрии колебаний. Нулевой моде ( $m = 0$ ) соответствуют осесимметричные волны, они реализуются независимо от наличия на струе заряда. Первой моде ( $m = 1$ ) – неосесимметричные волны, или изгибные колебания в струе, или, иначе говоря, хлыстообразное движение её распадающегося конца. В незаряженной струе они не реализуются, но возбуждаются, лишь только на струе появится сколь угодно малый заряд [27]. Второй моде ( $m = 2$ ) соответствуют неосесимметричные волны, связанные с деформацией кругового поперечного сечения струи к эллипсу. Эти волны возникают при достаточно большом заряде, приходящемся на единицу длины струи, и на их гребнях реализуется электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи. Феноменология электростатической неустойчивости боковой поверхности струи наблюдалась в качестве непонятного, экзотического явления в экспериментах [28–29] и уже более осознанно – в [30].

Критерий реализации неустойчивости  $m$ -й моды струи имеет вид [25–27]:

$$\omega \equiv \frac{\mu^2}{\pi r_0 \sigma} = \frac{(1 - m^2 - (kr_0)^2)}{\left(1 + m - \frac{(kr_0) \cdot K_{m+1}(kr_0)}{K_m(kr_0)}\right)}, \quad (12)$$

где  $\omega$  – безразмерный параметр, характеризующий устойчивость струи по отношению к собственному заряду;  $\mu$  – электрический заряд, приходящийся на единицу длины струи;  $k$  – волновое число;  $r_0$  – радиус струи;  $K_m(x)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $m$ .

На рис. 2 приведены критические кривые для первых четырёх мод, рассчитанные по (12) в безразмерных переменных, в которых принято  $r_0 = \rho = \sigma = 1$ . Видно, что при  $m = 2$  критическая кривая имеет минимум. Расчёты показывают, что положение минимума определяется координатами  $\omega = 2,905$  и  $k = 0,78$ .



**Рис. 2.** Зависимость  $w = w(k)$ , полученная для первых четырёх азимутальных мод, расположившихся в порядке возрастания номеров (толщины линий), самая тонкая линия соответствует  $m = 0$  (а) и более крупный план зависимости  $w = w(k)$  для  $m = 2$  в окрестности минимума кривой (б).

Принимая во внимание, что  $\mu \equiv 2\pi r_0 \frac{l\kappa}{l}$ , где  $l$  – отрезок вдоль оси струи, переходя к плотности заряда и приравнивая параметр  $\omega$  к минимальному критическому значению  $\omega = 2,905$ , получаем

$$\omega \equiv \frac{4\pi\kappa^2 r_0}{\sigma} = \frac{(1 - m^2 - (kr_0)^2)}{\left(1 + m - \frac{(kr_0) \cdot K_{m+1}(kr_0)}{K_m(kr_0)}\right)} = 2,905.$$

Отсюда для критической (в смысле реализации электростатической неустойчивости) плотности заряда на струе находим

$$\kappa = \sqrt{\frac{0,726}{\pi} \cdot \frac{r_0}{\sigma}}.$$

В безразмерных переменных, в которых  $r_0 = \rho = \sigma = 1$ , это выражение имеет вид

$$\kappa = \frac{0,852}{\sqrt{\pi}}. \quad (13)$$

Сравнивая давления, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{r_0}{\sigma} \geq 1 &\Rightarrow \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{r_0}{\sigma} \geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(4\pi)^2 \kappa^2}{8\pi} \cdot \frac{r_0}{\sigma} \geq 1 &\Rightarrow 2\pi\kappa^2 \cdot \frac{r_0}{\sigma} \geq 1 \Rightarrow \kappa^2 \geq \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{r_0} \end{aligned}$$

или в безразмерном виде

$$\kappa \geq \frac{0,707}{\sqrt{\pi}}.$$

То есть имеем заниженное значение поверхностной плотности заряда. Чтобы получить точное значение, определяемое (13), нужно было отношение давлений приравнять к 1,452, а не к 1.

Подводя итоги изучения критических условий реализации неустойчивостей с однородным и неоднородным распределением собственного и индуцированного заряда по поверхности жидкости, отметим, что результаты точных расчетов и результаты расчетов на основе приравнивания действующих в противоположные стороны давлений электростатического и капиллярного совпадают лишь в порядке исключения, а в общем случае различаются. Это различие незначительно и численно составляет около десятой доли. Для качественных расчетов на основе теории размерности это неплохо.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неоднородное распределение плотности индуцированного заряда приводит к тому, что для реализации электростатической неустойчивости электрическое давление на вершину сферoidalной капли может быть примерно вдвое меньше капиллярного. Для однородно заряженной плоской поверхности аналогичная ситуация вызывается предположительно из-за того, что эмиссионный выступ имеет полусферическую форму. При неоднородном распределении индуцированного заряда по плоской поверхности жидкости критические условия реализации электростатической неустойчивости оказываются менее жесткими, чем при однородном.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tonks L. A Theory of Liquid Surface Rupture by Uniform Electric Field. *Phys Rev.* 1935, **48**, 562–568.
2. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
3. Taylor G.I., McEwan A.D. The Stability of a Horizontal Fluid Interface in a Vertical Electric Field. *J Fluid Mech.* 1965, **22**(1), 1–15.
4. Шутов А.А. Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость-вакуум. *ЖТФ.* 2002, **72**(8), 126–130.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В. О характерном времени реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости. *ЖТФ.* 2004, **74**(7), 140–142.
6. Жукарев А.С., Иванов С.А., Киров С.А. и др. *Электричество и магнетизм. Методика решения задач.* М.: МГУ, 2010. 436 с.
7. Kim O.V., Dunn P.F. Control Production by in-flight Electro spraying. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
8. Vyckov V.L., Ershov A.P., Chernikov V.A. Corona Discharge Modeling of Some Ball Lightning Features. Atmosphere, Ionosphere, Safety. *Proceedings of 10-th International symposium on Ball Lightning.* 2008. July 7–12. P. 7–11.
9. Саранин В.А., Майер В.В., Вараксина Е.И. Неустойчивость Тонкса-Френкеля в поле коронного разряда. Доклады X Международной конференции «Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. ДПО и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере». 04–08 июля 2013 года. Ярославль, Россия. <https://sites.google.com/site/blehdconference2013/dok lady>.
10. Френкель Я.И. *Электродинамика.* Т.2. М: ОНТИ, 1935. 555 с.
11. Ахиезер А.Л. *Общая физика. Электрические и магнитные явления. Справочное пособие.* Киев: Наукова думка, 1981. 472 с.
12. Rayleigh (Strutt J.W.) On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity. *Phil. Mag.* 1882, **14**, 184–186.
13. Hendrics C.D., Schneider J.M. Stability of Conducting Droplet under the Influence of Surface Tension and Electrostatic Forces. *J Amer Phys.* 1963, **1**(6), 450–453.
14. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. Rayleigh Jets from Levitated Microdroplets. *Nature.* 2003, **421**(6919), 128.
15. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-induced Droplet Ionization: Time-resolved Studies of Distorsion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplet Exposed to Strong Electric Fields. *J Phys Chem. B.* 2005, **109**, 8244–8250.
16. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О. О некоторых закономерностях реализации сферoidalных осцилляций и электростатической неустойчивости заряженной капли. *ЖТФ.* 2010, **80**(11), 11–20.
17. Macky W.A. Some Investigations on the Deformation and Breaking of Water Drops in Strong Electric Fields. *Proc Roy Soc London,* 1931, **133**(A822), 565–587.
18. Taylor G.I. Disintegration of Water Drops in an Electric Field. *Proc Roy Soc London,* 1964, **A280**, 383–397.
19. Nolan J.J. *The Breaking of Water-Drops by Electric Fields.* Proceedings of the Royal Irish Academy, Section A, 1926, vol. 37, part 3, 13 p.
20. Inculet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J. Dynamics of Water Droplets Breakup in Electric Fields. *IEEE Transactions on Industry Applications.* 1992, **28**(5), 1203–1209.
21. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий реализации неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе. *ЭОМ.* 2015, **51**(3), 44–50.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 620 с.
23. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* М.: Наука, 1980. 976 с.
24. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. *ЖТФ.* 1985, (7), 1272–1278.
25. Григорьев А.И. Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости. *ЖТФ.* 2009, **79**(4), 36–45.
26. Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в коллинеарном электростатическом поле. *ЖТФ.* 2011, **81**(6), 36–41.
27. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Спонтанный распад струй.* Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2012. 204 с.
28. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic Spraying of Liquids: Main Functioning Modes. *J Electrostatics.* 1990, **25**, 165–184.
29. Jaworek A., Krupa A. Classification of the Modes of EHD Spraying. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
30. Kim O.V., Dunn P.F. Control Production by in-flight Electro spraying. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.

Поступила 13.05.14

После доработки 13.06.14

### Summary

Applying analytical solutions of classical tasks (on the analogy of them, but by qualitative methods) criteria of realization of instability of a free surface of conductive liquid at its various geometry have been derived. Both uniform and non-uniform distribution of density induced by an external electrostatic field or by its own charge are considered. The criteria of instability of the charged stream, the charged spheroidal drop, and of the flat surface of the conductive liquid are found in a non-uniform electrostatic field of a point charge, a thin charged core, and of a dipole.

*Keywords:* flat surface, spheroidal drop, stream, electrostatic field, charge, instability criterion.