

# Об устойчивости и спонтанном капиллярном распаде заряженных струй. Часть 2. Нелинейные аналитические исследования. Эксперименты

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Проведен обзор аналитических расчётов устойчивости капиллярного волнового движения на поверхности заряженных струй несжимаемой жидкости в нелинейных по малому параметру приближениях, а также и некоторых проблемных экспериментальных исследований. В качестве малого параметра выступает отношение амплитуды волны к радиусу струи. Рассмотрено влияние продольного электростатического поля и вязкости жидкости.

*Ключевые слова:* струя, идеальная электропроводная жидкость, нелинейные волны, электрический заряд, коллинеарное электростатическое поле, вязкость, материальная среда, асимптотические аналитические расчёты, метод многих масштабов, эксперименты.

УДК. 532.5:537.1:541.24:621.319.7

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование нелинейных волн на поверхности струй представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в академической науке, технике и технологии. Проблема в том, что сами уравнения гидродинамики (электродинамики) и некоторые из граничных условий являются нелинейными, и большая часть теоретических исследований выполнена в пренебрежении нелинейными слагаемыми уравнений и граничных условий. Тем не менее нелинейности имеют место при дроблении струй в образовании сателлитов, появлении нелинейных компонент у всех искомым величин, а также внутреннего нелинейного резонанса частот волн, приводящего к перераспределению энергии волнового движения, в смещении резонансных частот, этому и посвящена настоящая часть обзора, целью которого – обратить внимание читателя на существующие проблемы в изучении нелинейной неустойчивости и спонтанного распада заряженных струй.

### 1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Первый аналитический теоретический разбор устойчивости осесимметричных волн конечной амплитуды на поверхности цилиндрических струй идеальной несжимаемой жидкости был выполнен около полувека назад [1] для незаряженной струи. Важна была сама идея и возможность такого расчета. В [1] использовался метод растянутых координат по времени и по продольной пространственной переменной. Основным результатом работы [1] следует считать поста-

новку проблемы. В том же году и в том же журнале появилась аналогичная работа [2], выполненная также для незаряженной струи. Использовался тот же метод – растянутых переменных, но применялся он только ко времени. Основное внимание и в [1], и в [2] уделялось возможному уточнению результатов линейной теории, а именно исследованию влияния конечности амплитуды волн на волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости, и на положение границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами (в линейной теории её положение определялось соотношением  $k^2 R_0^2 = 1$ , где  $k$  – волновое число, а  $R_0$  – радиус невозмущённой струи [3]). Выяснилось, что результаты расчетов зависят от вида начальных условий и что поправки к частоте квадратичны по малому параметру, в качестве которого принималась амплитуда начальной деформации. Сами же нелинейные поправки, полученные в [1–2], различались между собой. В следующей работе [4] на эту тему предположили, что метод растянутых координат не подходит для расчета нелинейных волн на поверхности струи, и предложили использовать метод разных временных масштабов. И получили результаты, отличные от результатов предыдущих работ.

Дальнейшие исследования выявили еще одно приложение теории нелинейных волн на струе: феномен сателлиитообразования. Экспериментально выяснилось, что струя редко распадается на капли одинаковых размеров, определяемых волновым числом наиболее неустойчивой волны, даже при вынужденном капиллярном распаде. В реальности отделяющаяся от струи капля связана со струей перемычкой, которая образует еще одну маленькую капельку – сателлит. В рамках ли-

нейной теории этот феномен непонятен. В нелинейных расчетах выясняется, что вследствие нелинейности уравнений гидродинамики кроме волны с волновым числом  $k_*$ , определяющей распад струи на капли в рамках линейных представлений, на струе возникают и волны с кратными волновыми числами  $j \cdot k_*$ , где  $j$  – целое число. Реальный распад струи на капли определяется суперпозицией всех существующих на струе волн, что и приводит к образованию перетяжки и капель сателлитов.

Теоретические аналитические исследования нелинейных осцилляций и устойчивости заряженных цилиндрических струй начались с работ [5–6], в которых изучалась устойчивость струи электропроводной жидкости в радиальном электростатическом поле. А точнее, исследовалось влияние электрического поля на волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости, на положение границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами и на закономерности образования капель сателлитов. В [5] решение с сохранением нелинейных поправок третьего порядка малости искалось методом растянутых параметров в диапазоне волновых чисел, в котором реализовывалась капиллярная неустойчивость. Было найдено, что граница диапазона устойчивых волн зависит от квадрата амплитуды начальной деформации и квадрата поверхностной плотности заряда, к которому чувствительны и размеры сателлитов. Очевидным недостатком работы [5] является то, что не все используемые в ней обозначения, в том числе и входящие в запись окончательного результата, пояснены в тексте.

В [6] методом многих пространственных и временных масштабов исследовалась устойчивость волнового пакета на поверхности заряженной струи, составленного из капиллярных волн, по отношению к которым струя капиллярной неустойчивости не претерпевает. Условие исчезновения секулярных слагаемых третьего порядка малости позволило выписать нелинейное эволюционное уравнение для амплитуд волн на поверхности струи, имеющее вид нелинейного уравнения Шредингера. Выяснилось, что волновой пакет модуляционно неустойчив. Выписано решение второго порядка малости для коротких периодических капиллярных волн на поверхности заряженной струи, в котором, однако, отсутствуют компоненты, описывающие нелинейное резонансное взаимодействие волн. Нелинейные поправки к частотам волн не найдены.

В [7–8] исследовались нелинейные волны на заряженной поверхности струи идеальной электропроводной несжимаемой жидкости. Главное различие между задачами изучения линейных и нелинейных волн заключается в том, что, как

правило, целью линейных задач являются вывод и анализ дисперсионного уравнения, а нелинейные задачи по своему смыслу эволюционные и решаются при наличии начальных условий. Для задач о волнах на поверхности бесконечно протяженных струй жидкости в качестве таких условий обычно берут деформацию струи в начальный момент времени и, например, распределение поля скоростей [9–10]. Иногда второе начальное условие формулируется на финальной стадии решения задачи, исходя из требования наименьшей громоздкости получаемого решения [11]. Начальная деформация струи может задаваться в виде как единичной виртуальной волны [11], так и волнового пакета [11]. Вторая ситуация более общая, и на ней следует остановиться подробнее.

В [10] методом многих временных масштабов исследовались волны конечной амплитуды на поверхности струи идеальной электропроводной несжимаемой жидкости в ситуации, когда начальная деформация формы струи определяется суперпозицией нескольких в общем случае неосесимметричных волн. В качестве малого параметра использовалось отношение амплитуды начальной деформации к радиусу струи. Искомые функции являлись: возмущение формы поверхности струи, потенциал поля скоростей течения жидкости в струе и потенциал электростатического поля вне струи.

За счет нелинейного взаимодействия волн, определяющих начальную деформацию струи, во втором порядке малости возбуждаются волны как с удвоенными волновыми и азимутальными числами, так и с волновыми и азимутальными числами, получающимися в результате сложения и вычитания волновых и азимутальных чисел. Несложно увидеть, что коэффициенты при нелинейных поправках к форме струи  $\sim \varepsilon^2$  имеют резонансный вид, то есть при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами

$$\begin{aligned} (\omega_{m_n}(k_n) \pm \omega_{m_l}(k_l))^2 &= \\ &= \omega_{(m_n \pm m_l)}^2(k_n \pm k_l), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_{m_n}(k_n)$  и  $\omega_{m_l}(k_l)$  определяются дисперсионным уравнением.

Для частот  $\omega_{(m_n \pm m_l)}(k_n \pm k_l)$  дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega_{(m_n \pm m_l)}^2(k_n \pm k_l) &= \\ &= D_{(m_n \pm m_l)}(|k_n \pm k_l|) \{ (k_n \pm k_l)^2 + (m_n \pm m_l)^2 - \\ &- 1 + w[1 + H_{(m_n \pm m_l)}(|k_n \pm k_l|)] \}. \end{aligned}$$

Из теории нелинейного взаимодействия волн известно, что волны на поверхности жидкости могут эффективно обмениваться энергией при квадратичной нелинейности, характерной для гидродинамических задач, если их частоты  $\omega_j$  и волновые векторы  $\vec{k}_j$  удовлетворяют соотношениям [12]:

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 &= 0; \\ \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, во взаимодействии должны участвовать как минимум три волны, а само взаимодействие называется трехволновым. Если волны не удовлетворяют указанным соотношениям, то эффект их взаимодействия имеет первый порядок малости по безразмерной амплитуде волны [12]. Для волн на поверхности струй, бегущих вдоль оси  $z$ , соотношение (2) для волновых чисел примет скалярный вид:

$$k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0. \quad (3)$$

Сравнение (1) и (2) показывает, что если принять

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{m_n}(k_n); \quad \omega_2 = \omega_{m_l}(k_l); \\ \omega_3 &= \omega_{(m_n \pm m_l)}(k_n \pm k_l), \end{aligned}$$

то эти условия становятся идентичными, а условие (3) выполняется автоматически, при  $k_1 = k_n$ ;  $k_2 = k_l$ ;  $k_3 = k_n \pm k_l$ . Поскольку частоты связаны с волновыми числами дисперсионным соотношением, то несложно видеть, что при отсутствии электрического заряда на струе условие (2) для частот может выполняться только случайно. Для ситуации, когда начальная деформация струи определяется одной волной [8], этот вывод наглядно подтвержден расчетами по дисперсионному уравнению. Появление дополнительной степени свободы, связанной с наличием заряда на струе, позволяющего изменять и частоты, и волновые числа волн и неодинаково сказывающегося на волнах с различными  $k$  и  $m$ , обеспечивает выполнение условий (2) для многочисленных комбинаций волновых  $k$  и азимутальных  $m$  чисел.

Если  $k_n = k_l$  и  $m_n = m_l$ , то реализуется случай вырожденного нелинейного резонансного взаимодействия, характеризуемого тем, что одна волна из спектра волн, определяющих начальную деформацию, например  $k_1$ , дважды взаимодействует с нелинейно возбуждающейся волной, например  $k_3$ , передавая ей энергию. В этом случае условия резонансного взаимодействия (2) переписываются в виде

$$2\omega_1 = \omega_3; \quad 2k_1 = k_3.$$

Вырожденное резонансное взаимодействие – единственное реализуется в ситуации, когда

начальная деформация струи определена одной волной. Если в резонансном взаимодействии принимают участие три различные волны: две, входящие в спектр волн, определяющих начальную деформацию, и одна из волн, возбуждающихся за счет нелинейности, – то говорят о вторичном комбинационном резонансном взаимодействии. Когда начальная деформация струи определена суперпозицией нескольких волн (волновым пакетом), то реализуется и вторичное комбинационное резонансное взаимодействие, и вырожденное.

В [8] проанализирована ситуация, когда начальная деформация струи определяется одной в общем случае неосесимметричной волной, и исследованы закономерности реализации вырожденного резонансного взаимодействия этой волны с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Выяснилось, что положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи. Оказалось, что осесимметричная волна ( $m = 0$ ) может взаимодействовать с изгибной волной ( $m = 1$ ). При вырожденном нелинейном резонансном взаимодействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из волны, определяющей начальную деформацию, с  $m = 1$  энергия может перекачиваться как в осесимметричную волну ( $m = 0$ ) с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную ( $m = 2$ ), также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с  $m > 2$  возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе. Последнее условие может выполняться для тонкого конца электропроводной струи, выброшенной заряженной поверхностью жидкости, имеющей постоянный потенциал поверхности, и, следовательно, неоднородное распределение поверхностного заряда, плотность которого будет увеличиваться с уменьшением радиуса струи по мере удаления от места ее зарождения [13–15]. В итоге закономерности перераспределения энергии нелинейной волны за счет нелинейного резонансного взаимодействия будут различны для начального и конечного участков струи, что в свою очередь приведет к различию условий дробления последней на разных ее участках. Здесь следует отметить, что большая часть проведенных аналитических исследований как линейных, так и нелинейных выполнена для струй цилиндрической формы, тогда как реальные струи, выбрасываемые неустойчивой поверхно-

стью жидкости, имеют образующую примерно гиперболической формы [13, 15]: по мере удаления от места возникновения радиус струи уменьшается по закону  $R \sim z^{-1/4}$  (здесь  $z$  – продольная координата). Это приводит к тому, что влияние давления электрического поля и вязкости жидкости в различных сечениях струи (на разных расстояниях от торца капилляра) будут неодинаковы. Так, если рассмотреть идеализацию идеально проводящей струи, то для струи, поддерживаемой при постоянном потенциале, давление электрического поля на ее поверхность при уменьшении радиуса будет изменяться обратно пропорционально квадрату радиуса. В итоге различные участки струи будут не эквивалентны по отношению к реализации неустойчивости волн с различными волновыми и азимутальными числами.

Помимо сказанного о форме реальной струи следует указать на динамический характер формы струи и отсутствие равновесной её формы, в окрестности которой следует проводить разложение, при анализе задачи асимптотическим методом.

При многомодовой начальной деформации общие закономерности реализации нелинейного волнового движения на струе остаются прежними, но кроме вырожденных резонансов появляются и вторичные комбинационные. В комбинационных резонансах возможен обмен энергией между длинными и короткими волнами в обоих направлениях (от коротких к длинным, и обратно), а также между волнами с различной симметрией (различающимися значениями азимутальных чисел).

Нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации. В безразмерных переменных, в которых  $R_0 = \gamma = \rho = 1$ , эта форма имеет вид:

$$r(z, \varphi) = 1 - 0,25\varepsilon^2$$

$$\left[ \frac{1}{2}(h_1^2 + h_l^2) - h_1^2 a_1^2 \cos(2m_1 \varphi) - h_l^2 a_l^2 \cos(2m_l \varphi) \right].$$

В [10] волны конечной амплитуды на поверхности электропроводной струи идеальной несжимаемой жидкости в ситуации, когда начальная деформация струи определяется одной в общем случае неосесимметричной волной, рассчитывались с сохранением слагаемых третьего порядка малости. Коэффициент, определяющий нелинейную поправку к частоте, также является резонансным и содержит оба вырожденных резонанса, характерных для расчетов второго порядка

малости:  $\left[ 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) \right]^{-1}$  и  $\left[ 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) \right]^{-1}$ . Резонансы, появляющиеся в

поправках третьего порядка малости, являются четырехволновыми, то есть в них участвуют четыре волны. В вырожденной форме они записываются, например, в виде  $\left[ 9\omega_m^2(k) - \omega_{3m}^2(3k) \right]^{-1}$ . В этом соотношении  $\omega_{3m}(3k)$  – частота волны, в которую энергия перекачивается, а  $\omega_m(k)$  – частота волны, определяющей форму начальной деформации, от которой энергия отбирается в трехкратном взаимодействии.

В расчетах третьего порядка малости, кроме поправок третьего порядка малости к амплитудным значениям потенциала поля скоростей волнового течения жидкости, электростатического потенциала и рельефа струи, мало сказывающихся на общих закономерностях реализации волнового движения конечной амплитуды, наиболее интересный результат – появление нелинейных поправок к частотам волн  $\sim \varepsilon^2 \cdot g(k, w)$ . Наличие этих поправок приводит к изменению критических условий (критической длины волны и величины поверхностной плотности электрического заряда) реализации неустойчивости струи [10–11].

Как было показано выше, условие реализации неустойчивости струи по отношению к действию сил поверхностного натяжения и давлению электрического поля заключается в прохождении квадрата частоты через ноль в область отрицательных значений. С учетом наличия нелинейной поправки к частоте в третьем порядке малости это условие приводит к соотношению

$$\left( \omega_m + \varepsilon^2 \frac{g(k, w)}{\omega_m} \right)^2 \approx \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 \cdot g(k, w) = 0.$$

Несложно видеть, что влияние нелинейной поправки на ширину диапазона волновых чисел, в котором волны на струе претерпевают капиллярную неустойчивость, волновое число наиболее неустойчивой волны  $k_{\max}$ , критическое значение параметра  $w_{\max}$  и величину инкремента неустойчивости  $\gamma_{\max}$  будет различным при  $g(k, w) > 0$  и  $g(k, w) < 0$ .

В работе [16] методом растянутых временных и пространственных координат в расчетах третьего порядка малости при одноволновой неосесимметричной начальной деформации поверхности струи идеальной электропроводной жидкости были исследованы закономерности разбиения струи на капли. Показано, что нелинейная деформация профиля волны конечной амплитуды приводит к уменьшению характерного времени разбиения струи на капли. Нелинейное ре-

зонансное взаимодействие волн не исследовалось.

В работах [17–18] исследована устойчивость неосесимметричных волн конечной амплитуды на поверхности объемно заряженной (модель «вмороженного» заряда) струи идеальной диэлектрической несжимаемой жидкости. При сравнении с параметрами нелинейных волн на поверхности заряженной струи идеально проводящей жидкости выяснилось, что при равных электрических зарядах, приходящихся на единицу длины струи, характеристики волн (амплитуды нелинейных поправок, положения резонансов и т.п.) на поверхности объемно заряженной струи диэлектрической жидкости с малыми диэлектрическими проницаемостями могут существенно (на десятки процентов) отличаться от таковых для струи идеально проводящей жидкости.

В [19] в квадратичном по отношению амплитуды волны к радиусу невозмущенной струи исследовании волн на поверхности заряженной струи, движущейся с постоянной скоростью относительно идеальной диэлектрической среды, показано, что наличие тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи приводит к появлению периодических волновых движений на границе раздела сред и носит дестабилизирующий характер как для осесимметричных, так и для изгибных, и изгибно-деформационных волн. Выявлено наличие вырожденного внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн на поверхности струи шести различных типов, в которых возможна перекачка энергии между взаимодействующими волнами, в том числе и между волнами с различной симметрией. В последнем случае энергия перекачивается из волн, определяющих начальную деформацию, в осесимметричные волны. В [20] аналогичные выводы сделаны для цилиндрической струи в коллинеарном электростатическом поле.

## 2. НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В [21–22] в асимптотической аналитической процедуре второго порядка малости по отношению амплитуды волны к радиусу струи найдено решение задачи о расчете волнового движения конечной амплитуды на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле, коллинеарном оси невозмущенной струи. Нелинейные поправки к профилю струи, потенциалу поля скоростей и электростатическим потенциалам внутри и вне струи имеют резонансный характер. Вырожден-

ные резонансы, единственно возможные при использованных начальных условиях, соответствуют обмену энергией как между осесимметричными волнами, заданными в начальный момент времени, и осесимметричными же волнами, порождаемыми нелинейностью уравнений гидродинамики, так и между волнами с различной симметрией. Положения резонансов зависят от диэлектрических проницаемостей жидкости и среды, напряженности электрического поля, отношения плотностей сред и величины межфазного поверхностного натяжения. В вырожденном резонансном взаимодействии между волной, определяющей начальную деформацию, и волнами, возбуждающимися за счет нелинейности уравнений гидродинамики, могут участвовать волны с различной симметрией (с различными азимутальными числами).

В [23] показано, что внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие неосесимметричных волн при разумных значениях волновых чисел реализуется при достижимых в эксперименте напряженностях электростатического поля и скоростях спонтанного движения струи. Резонансное взаимодействие с участием изгибных волн реализуется при  $k \sim 1$ , а с участием изгибно-деформационных волн – при  $k \sim 3$ .

Внутреннее нелинейное вырожденное резонансное взаимодействие капиллярных волн на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной же несжимаемой материальной среды вдоль оси симметрии невозмущенной струи, приводит к появлению нарастающих во времени периодических волновых движений её границы раздела со средой (неустойчивости Кельвина-Гельмгольца) и может реализоваться в резонансных ситуациях двух типов. В обоих случаях энергия передаётся от изначально возбужденной волны независимо от её симметрии в волну осесимметричную. Глубина и характерное время реализации внутреннего резонансного взаимодействия определяются физическими параметрами задачи [24].

## 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА СТРУЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Строгий учет вязкости жидкости в задачах о нелинейных волнах на плоской и цилиндрической заряженной поверхности жидкости или о нелинейных осцилляциях заряженных капель и пузырьков является достаточно сложной проблемой и стал возможен лишь в начале этого века благодаря мощной компьютерной технике и разработке компьютерных пакетов аналитических вычислений. Тем не менее учет вязкости

жидкости в нелинейных расчетах устойчивости струй проводился начиная с семидесятых годов прошлого века в модели «тонкой струи» или квазиодномерной теории. В рамках этой теории струя рассматривается как одномерный объект, лишенный поперечных размеров, описываемый, однако, набором интегральных характеристик: радиусом сечения струи, коэффициентом поверхностного натяжения, коэффициентом вязкости, массовым расходом в сечении и т.п. [12, 25–27]. Поле скоростей волнового течения жидкости в струе при этом считается однородным по сечению последней (не зависящим от расстояния до оси). В основе такого подхода лежат идеи, заимствованные из теории пограничного слоя и теории течения вязкой жидкости в тонких слоях на твердом дне [28]. Такое предположение выполняется для тонких струй, радиусы которых много меньше длины наиболее неустойчивой волны, когда радиус струи и скорость волнового течения медленно меняются вдоль продольной координаты. В исследовании электропрядения (electrospinning) [29] квазиодномерные уравнения являются основной математической моделью феномена. И тем не менее область применимости квазиодномерной теории недостаточно широка. Так, она вряд ли применима к представляющему большой практический интерес исследованию распада струи на капли в весьма сильном радиальном электрическом поле. Согласно сказанному с ростом величины заряда, приходящегося на единицу длины струи, длина волны, обладающей максимальным инкрементом, уменьшается и требование малости радиуса струи по сравнению с длиной наиболее неустойчивой волны уже не выполняется. Наложение на струю продольного электрического поля, согласно экспериментальным данным [30–31], приводит к увеличению длины нераспавшейся части струи, и в рамках классических представлений должно приводить к разбиению струи на длинные куски, из которых должны получаться крупные капли. Однако в экспериментах по электродиспергированию жидкости отмечается, что струя дробится на капли с радиусами, сравнимыми с радиусами струй. По всей видимости, при наличии у поверхности струи и радиальной, и продольной компонент электрического поля большой величины одновременно реализуется несколько механизмов распада, характерных и для радиального, и для продольного электрических полей по отдельности. В таких условиях квазиодномерная теория также не применима. Кроме того, эта теория не позволяет корректно учесть эффект релаксации электрического заряда на поверхности струи с реальной электропроводностью, хотя и часто используется в указанном

контексте [13]. Само исходное предположение о быстром установлении однородного по радиусу распределения поля скоростей в струе выполняется только при достаточно больших значениях безразмерной вязкости.

Вопрос о применимости модели одномерной струи для расчета закономерностей распада заряженных струй в линейном по амплитуде волн приближении неоднократно обсуждался в научной литературе [32]. Результаты аналитических расчетов линейного приближения сравнивались с результатами нелинейных численных расчетов для трехмерной струи вязкой жидкости. Были предложены модификации одномерного приближения с постулированием заранее заданных закономерностей распределения поля скоростей по радиусу струи в широком диапазоне изменения физико-химических характеристик жидкости [32]. Результаты проведенных оценок вселяют сдержанный оптимизм по поводу возможности использования одномерных моделей для расчета закономерностей электродиспергирования заряженных струй со значительной вязкостью и указывают на заметные погрешности, допускаемые в расчетах для маловязких жидкостей [32].

В [33] проведена модернизация теории пограничного слоя, связанная с наличием у свободной поверхности струи, совершающей периодические движения, пограничного слоя. Для описания течения в пограничном слое предложена упрощенная, по сравнению с полной формулировкой, модельная задача, строение решения которой отражает определяющие черты точного решения в асимптотике малой вязкости: вид дисперсионного уравнения, профиль волны, скорость вязкого затухания со временем поля скоростей. Получена оценка на толщину пограничного слоя, при которой в асимптотике малой вязкости различие между точным решением и решением модельной задачи (сформулированной в рамках предложенной теории) может быть задано с заранее оговоренной точностью. Определена область применимости модифицированной теории.

Строгое аналитическое асимптотическое решение задачи расчета волн конечной амплитуды на поверхности толстой струи вязкой несжимаемой жидкости, выполненное в [34] методом прямого разложения по безразмерной амплитуде волны, представляется своевременным.

В расчетах второго порядка малости показано, что основным результатом влияния вязкости жидкости является затухание волн со временем. Так же как и в идеальной жидкости, увеличение поверхностной плотности заряда приводит к уменьшению как частоты осцилляций, так и декремента затухания, пропорционального коэффициенту кинематической вязкости. Амплитуды

поправок второго порядка малости не остаются неизменными во времени, как в идеальной жидкости. Но в течение примерно половины периода волны, определяющей начальную деформацию, нарастают и лишь потом гасятся вязкостью, причём при умеренных значениях безразмерной вязкости ( $\nu < 0,1$ ) достигаемые максимальные амплитудные значения превышают аналогичные значения, реализующиеся в струе идеальной жидкости. Такая временная эволюция характерна для малых возмущений, накладываемых на основное течение маловязкой жидкости, удовлетворяющее уравнению Навье-Стокса, и является предметом исследования теории гидродинамической устойчивости. Обнаруженный феномен интересен тем, что не связан с возмущением, обусловленным внешними силами, а проявляется как результат нелинейного взаимодействия волны, определяющей начальную деформацию струи.

В приближении малой вязкости (накладываемое ограничение на вязкость мало ограничивает набор жидкостей, к которым анализ применим) исследовано её влияние на капиллярное волновое движение. Найдено аналитическое выражение для декремента затухания капиллярных волн на струе в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ :

$$\beta = -2\nu k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)}.$$

Наличие на струе электрического заряда декремента не меняет. При больших значениях безразмерного  $k$  (при больших значениях радиуса кривизны поверхности) отношение цилиндрических функций становится весьма близким к единице. Для не очень больших  $k$  (для тонких струй и не очень коротких длин волн) влияние кривизны поверхности, по которой бегут волны, заметно сказывается на величине их декрементов затухания. При больших  $k$  влияние кривизны поверхности жидкости, по которой бежит волна, несущественно.

Показано, что в системе двух несмешивающихся жидкостей декремент затухания в зависимости от кинематических вязкостей компонент и отношения плотностей может быть как больше, так и меньше декремента затухания чистой жидкости.

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КАПИЛЛЯРНОГО РАСПАДА НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ СТРУЙ

Очевидное приложение феномена капиллярного распада наэлектризованных струй связано со спонтанным распадом таких струй на капли в академических, технических и технологических

приложениях. Экспериментальным исследованиям феномена посвящено множество публикаций, их и перечислить в рамках одной работы невозможно. Поэтому в нижеследующем изложении остановимся только на имеющихся проблемах.

Одним из наиболее очевидных умозаключений, к которому приводит даже поверхностное знакомство с проведенными экспериментами, является вывод о высокой чувствительности обсуждаемого феномена к физическим свойствам рабочей жидкости, особенностям экспериментальной установки и таким характеристикам процесса, как давление жидкости в капилляре, из которого вытягивается струя, и потенциал. В зависимости от величины и соотношения этих параметров выделяется около десятка режимов феномена электродиспергирования жидкости, сильно различающихся как внешним видом, так и характеристиками формирующегося капельного аэрозоля (спектрами размеров, зарядов и удельных зарядов капель), приведенных на основе наблюдаемой феноменологии в систему в работах [11, 30–31, 35].

Несмотря на значительное число экспериментальных работ, для большинства из них характерны отсутствие системности в исследовании влияния физико-химических характеристик жидкости на процесс распыления, а также случайность в выборе оборудования и объекта изучения – рабочей жидкости (как правило, используется та жидкость, которая имеется под руками, либо то вещество и те параметры установки, с которыми связан конкретный практический интерес). Естественно, выделяются два направления экспериментальных работ (см., например, [36–46]).

1. Изучение физических закономерностей распыления какой-либо одной жидкости в зависимости от внешних характеристик процесса: потенциала, подаваемого на капилляр; объемного расхода жидкости (или гидростатического давления жидкости в капилляре), вида электродов (металлический или стеклянный капилляр, со смачиваемыми или не смачиваемыми стенками; различной конфигурации противоэлектроды, располагающиеся на различных расстояниях от капилляра и т.п.). При этом авторы обычно ограничиваются сообщением названия используемой жидкости (или смеси жидкостей), не затрудняя себя измерением основных физико-химических характеристик.

2. Исследование влияния на процесс распыления какого-либо одного из свойств рабочей жидкости (обычно проводимости) [36, 38, 39]. В этих случаях эксперимент проводится с целым набором жидкостей, подобранных таким образом, чтобы интересующее свойство изменялось в до-

статочном широком диапазоне значений. Основным недостатком работ такого типа является отсутствие контроля над изменением других физико-химических свойств используемых жидкостей. Хотя интуитивно ясно, что авторы должны бы стремиться к тому, чтобы все неконтролируемые в данном эксперименте свойства жидкостей изменялись очень слабо, однако это, как правило, не оговаривается и не приводятся даже приблизительные значения основных физических характеристик жидкостей (по-видимому, малоинтересных с точки зрения авторов).

Перечисленные выше недостатки экспериментальных работ препятствуют формированию единого взгляда на явление электрогидродинамического диспергирования жидкости и созданию единой классификации его разнообразных режимов. Многие из авторов заново выделяют наблюдающиеся в проводимом ими эксперименте режимы электродиспергирования, приводя описательную характеристику и пользуясь собственной терминологией для обозначения. Сопоставить же результаты различных работ, как указывалось выше, невозможно из-за недостатка информации об условиях проведения эксперимента.

Наиболее детально описанные экспериментальные исследования закономерностей электродиспергирования жидкости при распаде заряженных струй, выполненные в последний десяток лет (содержащие и сравнения с теоретическими данными), ориентированы в основном на один режим электродиспергирования из десятка: «конусно-струйный» (cone-jet). В этом режиме длинная устойчивая струя выбрасывается из вершины «конуса Тейлора» (см., например, [30, 47–51]), и вышеупомянутые теоретические модели распада заряженных струй наиболее адекватно применимы для сравнения с результатами экспериментов, выполненных для этого режима. Так что построение общей строгой теоретической классификации экспериментально наблюдаемых режимов электродиспергирования жидкости – дело не самого ближайшего будущего.

Следует отметить, что в последние двадцать пять лет регулярно проводятся международные конференции по электродиспергированию жидкости (ILASS – International Conference on Liquid Atomization and Spray System), собирающие сотни докладов, посвященных этому феномену. И хотя подавляющее большинство представляемых работ носят экспериментальный характер и посвящены в основном особенностям электродиспергирования конкретных жидкостей в конкретных установках и устройствах, тем не менее общее количество публикаций по обсуждаемой те-

ме исчисляется тысячами. И насущной проблемой является построение общей теории электродиспергирования (дробления заряженной струи с формой, отличной от цилиндрической, на капли) с учетом реальных физико-химических характеристик жидкостей и многообразия релаксационных и нелинейных эффектов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный обзор показал, что существующие сведения о распаде струй, выбрасываемых неустойчивой по отношению к собственному или индуцированному электрическому заряду свободной поверхностью жидкости, избыточны проблемами.

В качестве задач, нуждающихся в решении, следует отметить следующие:

1. Определение нелинейных поправок к частоте волн для заряженной и незаряженной струй в продольном электростатическом поле в материальной окружающей среде.
2. Исследование вырожденного и вторичного комбинационного внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн на поверхности заряженной и незаряженной струй в продольном электростатическом поле.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yuen M. Nonlinear Capillary Instability of a Liquid Jet. *J Fluid Mech.* 1968, **33**(Part 1), 151–163.
2. Wang D.P. Finite Amplitude Effect on the Stability of a Jet of Circular Cross-section. *J Fluid Mech.* 1968, **34**(Part 2), 299–313.
3. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On the Instability of Jets. *Proc London Math Soc.* 1878, **10**, 4–13.
4. Nayfeh F.H. Nonlinear Stability of a Liquid Jet. *Phys. Fluids.* 1970, **13**(4), 841–847.
5. Malik S.K., Singh M. Nonlinear Breakup of an Electrohydrodynamic Jet. *Quart Appl Math.* 1983, **41**(3), 273–287.
6. Kant R., Malik S.K. Nonlinear Electrohydrodynamic Instability of a Jet. *Quart Appl Math.* 1986, **43**(4), 407–419.
7. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Нелинейный асимптотический анализ осцилляций неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости. *ЖТФ.* 2004, **74**(8), 6–14.
8. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи. *ЭОМ.* 2005, (1), 42–50.
9. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции заряженной струи электропроводной жидкости при многомодовой начальной деформации ее поверхности. *ЖТФ.* 2006, **76**(9), 31–41.

10. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. О нелинейных поправках к частотам мод осциллирующей заряженной струи идеальной жидкости. *ЖТФ*. 2007, **77**(2), 46–55.
11. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
12. Филипс О.М. Взаимодействие волн. *Нелинейные волны*. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
13. Шутов А.А. Формирование и устойчивость заряженной струи в сильном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2006, (6), 52–67.
14. Ganan-Calvo A.M. On the theory of Electrohydrodynamically Driven Capillary Jets. *J Fluid Mechanics*. 1997, **335**, 165–188.
15. Turnbull R. Self-Acceleration of a Charged Jet. *IEEE Trans Ind Appl*. 1989, **25**(4), 699–704.
16. Doo-Sung Lee. Nonlinear Breakup of an Asymmetric Electrodynamic Jet. *EPJ B*. 2003, **33**, 487–494.
17. Воронина Н.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. О нелинейных поправках к частотам неосесимметричных мод объемно заряженной струи диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2008, **78**(6), 1–14.
18. Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. Нелинейные неосесимметричные осцилляции объемно заряженной струи. *ЖТФ*. 2008, **78**(7), 21–29.
19. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. Нелинейный анализ закономерностей реализации волнового движения на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной среды. *Изв. РАН. МЖГ*. 2012, (1), 81–92.
20. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О., Полянцев Н.А. Нелинейный анализ волнового движения на поверхности струи в продольном электрическом поле, движущейся в диэлектрической среде. *ЖТФ*. 2012, (8), 35–41.
21. Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. Асимптотическое исследование нелинейных неосесимметричных волн на поверхности незаряженной диэлектрической струи в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(10), 22–29.
22. Grigor'ev A.I., Voronina N.V., Shiryayeva S.O. Degenerated Internal Nonlinear Resonance Interaction of the Waves on the Surface of an Uncharged Dielectric Jet in a Longitudinal Electrostatic Field. *Surf Eng Appl Electrochem*. 2011, **47**(3), 235–241.
23. Grigor'ev A.I., Petrushov N.A. Nonlinear Analysis of the Internal Resonant Interaction of Nonaxisymmetric Waves on the Surface of a Jet Moving in Reference to a Medium in a Collinear Electrostatic Field. *Surf Eng Appl Electrochem*. 2012, **48**(5), 450–455.
24. Petrushov N.A., Grigor'ev A.I. Nonlinear Resonance Interaction of Waves on a Jet in a Radial Electric Field. *Surf Eng Appl Electrochem*. 2013, **49**(6), 468–473.
25. Ganan-Calvo A.M., Lopez-Herera J.M., P. Riesco-Chuera. The Combination of Electro spray and Flow Focusing. *J Fluid Mech*. 2006, **566**, 421–445.
26. Маркова М.П., Шкадов В.Я. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости. *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1972, (3), 30–37.
27. Новиков А.А. Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости. *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1977, (2), 179–182.
28. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
29. Feng J.J. Stretching of a Straight Electrically Charged Viscoelastics Jet. *J Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003, **116**, 55–70.
30. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic Spraying of Liquids: Main Functioning Modes. *J Electrostatics*. 1990, **25**, 165–184.
31. Jaworek A., Krupa A. Classification of the Modes of EHD Spraying. *J Aerosol Sci*. 1999, **30**(7), 873–893.
32. Lopez-Herera J.M., Riesco-Chueca P., Ganan-Calvo A.M. Linear Stability Analysis of Axisymmetric Perturbations in Imperfectly Conducting Liquid Jets. *Phys. Fluids*. 2005, **17**(№034106), 1–22.
33. Ширяева С.О. О модификации теории пограничного слоя для расчета волновых движений в цилиндрической струе вязкой жидкости. *ЖТФ*. 2008, **78**(12), 12–20.
34. Ширяева С.О. Аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях толстой заряженной струи вязкой жидкости. *Изв. РАН. МЖГ*. 2008, (5), 14–29.
35. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Опыт полуфеноменологической классификации наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкости. *ЖТФ*. 1994, **64**(3), 13–25.
36. Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М. Исследование процесса распыления жидкостей в электростатическом поле. Сб. Сильные электрические поля в технологических процессах. *Энергия*. 1979, (3), 87–105.
37. Drozin V.G. The Electrical Dispersion of Liquids as Aerosols. *J Coll Sci*. 1955, **10**(1), 158–164.
38. Carson H.S., Hendrics C.D. Natural Pulsations in Electrical Spraying of Liquids. *J Coll Sci*. 1965, **6**, 1072–1075.
39. Коженков В.И., Кирш А.А., Фукс Н.А. Исследование процесса образования монодисперсных аэрозолей при электростатическом распылении. *КЖ*. 1974, **36**(6), 1168–1171.
40. Hendrics C.D., Carson H.S., Hogan J.J., Schneider J.M. Photomicrography of Electrically Sprayed Heavy Particles. *AIAA J*. 1964, **2**(4), 733–737.
41. Hayati I., Bailey A.I., Tadros Th.F. Investigations into the Mechanisms of Electrohydrodynamic Spraying of Liquids. Part I. Effect of Electric Field and the Environment on Pendant Drops and Factors Affecting the Formation of Stable Jet and Atomization. *J Coll Int Sci*. 1987, **117**(1), 205–221.

42. Hayati I., Bailey A.I., Tadros Th.F. Investigations into the Mechanisms of Electrohydrodynamic Spraying of Liquids. Part II. Mechanism of Stable Jet Formation and Electrical Forces Acting on a Liquid Cone. *J Coll Int Sci.* 1987, **117**(1), 222–230.
43. Попов С.И., Петрянов И.В. К механизму электростатического распыления жидкостей. ДАН СССР. 1970, **195**(4), 893–895.
44. Fernandes de la Mora J., Loscertales I.G. The Current Emitted by Highly Conducting Taylor Cones. *J Fluid Mech.* 1994, **260**, 155–184.
45. Marginean I., Parvin L., Hefferman L., Vertes A. Flexing the Electrified Meniscus: The Birth of a Jet in Electrospays. *Anal Chem.* 2004, **76**, 4202–4207.
46. Ganan-Calvo A.M., Lopez-Herera J.M., P. Riesco-Chuera. The Combination of Electro spray and Flow Focusing. *J Fluid Mech.* 2006, **566**, 421–445.

### Summary

The review of analytical calculations of stability of capillary wave movement on a surface of the loaded streams of incompressible liquid in nonlinear approximations in small parameter, as well as of some problem pilot studies is presented. The relation of the amplitude of a wave to the stream radius is taken as a small parameter. The influence of a longitudinal electrostatic field and viscosity of liquid are considered.

*Keywords:* jet, ideal conductive liquids, nonlinear waves, electric charge, collinear electric field, viscosity, material medium, asymptotic analytical computations, multi-scale method, experiments.