О неустойчивости и спонтанном капиллярном распаде заряженных струй. Часть 1. Линейные аналитические исследования

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Представлен обзор аналитических расчётов устойчивости капиллярного волнового движения на поверхности заряженных струй несжимаемой жидкости линейного по малому параметру, в качестве которого выступает отношение амплитуды волны к радиусу струи, при наличии различных осложняющих факторов.

Ключевые слова: струя, идеальная электропроводная жидкость, линейные волны, электрический заряд, коллинеарное электростатическое поле, вязкость, материальная среда, аналитические расчёты.

УДК 532.5:537.1:541.24:621.319.7

ВВЕДЕНИЕ

В самых различных академических, технических и технологических приложениях приходится сталкиваться с заряженной свободной поверхностью жидкости или границей раздела несмешивающихся сред, которые можно моделировать несжимаемыми жидкостями. Когда отрицательное электростатическое давление на свободную поверхность жидкости (или границу раздела несмешивающихся сред), возмущенную капиллярным волновым движением теплового происхождения, превысит локальное значение давления капиллярных сил, с поверхности жидкости выбрасывается заряженная струйка жидкости, распадающаяся полидисперсным образом на отдельные капли [1]. Весь феномен носит название спонтанного электродиспергирования жидкости в противовес вынужденному капиллярному распаду струй, ориентированному на получение потоков монодисперсных заряженных капель [2].

Капиллярные волны теплового происхождения генерируются тепловым движением молекул жидкости и имеют амплитуды $\sim\sqrt{\kappa T/\gamma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура жидкости; γ – коэффициент поверхностного натяжения. Для большинства жидкостей амплитуды не превышают одной десятой нанометра. Такие волны в задачах гидродинамики обычно именуются волнами бесконечно малой амплитуды.

Под электростатическим полем будет пониматься электрическое поле, являющееся решением уравнения Пуассона (или Лапласа), изменяющееся во времени со скоростью, много меньшей скорости распространения электромагнитной волны. Электрические поля, возникающие вблизи заряженной поверхности жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением, изменяются во времени со скоростями, не превышающими скорости звука в жидкости, а потому эффектами запаздывания можно пренебрегать и считать их в проводимом рассмотрении электростатическими.

В связи с многочисленными приложениями феномена электродиспергирования жидкости, разнообразием установок, физико-химических свойств рабочих жидкостей и экспериментально выделенных режимов количество публикаций с описаниями явления феноменологии исчисляются тысячами. Но теоретическое осмысление всего многообразия экспериментальных данных пока не завершено в силу нелинейности и сложности феномена, а также «рыхлости» экспериментального материала. Говоря о «рыхлости», мы имеем в виду то обстоятельство, что экспериментальные результаты, полученные на различных установках, не всегда согласуются друг с другом; описания проведенных экспериментов весьма редко сопровождаются контролем физико-химических свойств рабочих жидкостей и погрешностями измерений. Результаты теоретических исследований, выполненных в различных техниках, идеализированных моделях и порядках приближений, оставляют ощутимые пробелы в системе представлений о физических механизмах электродиспергирования жидкости.

1. КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О КАПИЛЛЯРНОМ РАСПАДЕ СТРУЙ

Хорошо известно, что любая изолированная система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому фиксированный объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью с формой, отличной от сферической, подверженной действию сил поверхностного натяжения, при отсутствии внешних силовых полей будет стремиться принять сферическую форму, то есть форму с минимальной площадью свободной поверхности, обеспечивающую минимальность потенциальной энергии капиллярных сил. Сказанное относится и к цилиндрической струе жидкости, которая будет неустойчива по отношению к разбиению на капли, в чем несложно убедиться из простых рассуждений.

Идеальная несжимаемая жидкость

Пусть имеется участок бесконечной струи радиуса R_0, длины L идеальной несжимаемой жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения γ. Зададимся вопросом, для какого соотношения между R_0 и L переход под действием сил поверхностного натяжения от цилиндрической струи к совокупности сферических капель будет энергетически выгоден. Для этого сравним потенциальную энергию U_{cyl} капиллярных сил боковой поверхности цилиндра длиной L с потенциальной энергией U_{sph} капиллярных сил поверхности N одинаковых сферических капель, на которые предположительно может распасться рассматриваемый участок струи. Приравнивая объем цилиндра объему N сферических капель, получаем радиус одной капли: $r = \sqrt[3]{3R_0^2 L/4N}$.

Найдем теперь отношение потенциальной энергии капиллярных сил поверхности N сферических капель U_{sph} к потенциальной энергии капиллярных сил боковой поверхности участка струи U_{cyl} длиной L: $-\left(U_{sph}/U_{cyl}\right) \equiv \sqrt[3]{9R_0 N/2L}$. Потребуем, чтобы это отношение было меньше единицы, и получим условие самопроизвольного разбиения участка струи на N отдельных капель в виде $9R_0N/2L < 1$. Полагая $N = 1$, находим, что при $L \geq 4{,}5 \cdot R_0$ цилиндрической струе энергетически выгодно разбиваться на отдельные капли с радиусами $r \geq 3R_0/2$. Сказанное означает, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к волнам с длиной $\lambda \geq 4{,}5 \cdot R_0$. По отношению же к синусоидальным возмущениям поверхности с длинами волн λ, меньшими, чем $4{,}5 \cdot R_0$, струя оказывается устойчивой. Следует отметить, что спектр волн с длинами, удовлетворяющими условию $\lambda \geq 4{,}5 \cdot R_0$, бесконечен, но инкременты нарастания неустойчивости волн с различными длинами будут различны, и реальный распад струи на капли определится волной с максимальной величиной инкремента неустойчивости. Строгий анализ на основе принципа наименьшего действия [1] показывает, что незаряженная струя дробится на капли с несколько большими радиусами, чем получено выше в качественных рассуждениях.

Первое строгое аналитическое исследование устойчивости цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости по отношению к поверхностным капиллярным цилиндрическим осесимметричным волнам бесконечно малой (тепловой) амплитуды выполнено в конце позапрошлого века Рэлеем [3]. Рассматривая амплитуды цилиндрических капиллярных осесимметричных волн бесконечно малой амплитуды в качестве нормальных (главных) координат колебательной системы с бесконечно большим количеством степеней свободы, он составил функцию Лагранжа колебательной системы и выписал систему независимых уравнений для различных волновых чисел. Анализ полученной системы уравнений Лагранжа позволил исследовать устойчивость струи по отношению к капиллярным волнам различной длины. Поскольку использованный Рэлеем подход впоследствии неоднократно применялся к исследованию устойчивости струй при различных усложняющих факторах, обозначим кратко его основные этапы.

Пусть при отсутствии поля силы тяжести имеется бесконечно протяженный прямой круговой цилиндрический столб (струя) жидкости плотностью ρ радиуса R_0. Примем, что свободная поверхность струи деформирована осесимметричной капиллярной волной с волновым числом k бесконечно малой амплитуды $a_0(t)$. Изменение потенциальной энергии капиллярных сил U_γ, приходящееся на единицу длины, из-за деформации невозмущенной поверхности струи будет иметь вид

$$U_\gamma = \frac{\pi\gamma a_0^2}{2R_0}\left(x^2 - 1\right); \qquad (1)$$

$x \equiv kR_0$ здесь и ниже – безразмерное волновое число. Кинетическая энергия волнового движения жидкости в единицу длины струи запишется как

$$T = \frac{1}{2}\pi\rho R_0^2 \frac{J_0(ix)}{ix \cdot J_0'(ix)} \cdot \left(\frac{\partial a_0}{\partial t}\right)^2; \qquad (2)$$

где $J_0(ix)$ – функция Бесселя, а $J_0'(ix)$ – первая производная от функции Бесселя; i – мнимая единица. Функция Лагранжа легко выписывается: $L = T - U_\gamma$, так же как и уравнение Лагранжа для отыскания временной зависимости амплитуды волны на поверхности струи:

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{\rho R_0^3}\frac{ix\cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}\cdot\left(x^2-1\right)a_0=0.$$

С математической точки зрения полученное уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами и, следовательно, имеет решения экспоненциального типа с показателем экспонеты, определяющимся знаком и величиной коэффициента при a_0. В области устойчивости $x > 1$ амплитуда a_0 изменяется периодически: $a_0 \sim \exp(i\omega t)$. И для отыскания связи между частотой волны и волновым числом получается дисперсионное уравнение:

$$\omega^2=\frac{\gamma}{\rho R_0^3}\frac{ix\cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}\cdot\left(x^2-1\right).$$

В диапазоне длин волн $x < 1$ решения уравнения Лагранжа имеют экспоненциально нарастающий со временем либо экспоненциально убывающий вид, то есть $a_0 \sim \exp(\pm\eta t)$, где η – вещественное. Тогда

$$\eta^2=\frac{\gamma}{\rho R_0^3}\frac{ix\cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}\cdot\left(1-x^2\right).$$

В приближении $x^2 \ll 1$ Рэлей разложил правую часть полученного соотношения по степеням x^2, приравнял нулю производную от полученного разложения по x и получил, ограничиваясь первыми тремя слагаемыми разложения, квадратичное по x^2 алгебраическое уравнение. Найдя положительный корень этого уравнения, Рэлей выяснил, что максимальное значение инкремент неустойчивости достигает при $x^2 \approx 0{,}4858$. Это условие соответствует длине волны $\lambda \approx 9{,}016\cdot R_0$. Волны с указанной длиной волны имеют максимальный инкремент неустойчивости и определяют закономерности дробления струи на отдельные капли.

Обращает на себя внимание тот факт, что условие $x = 1$ разделяет движения жидкости в струе на периодические при $x > 1$ и апериодические при $x < 1$. Сам распад струи на капли происходит за счет экспоненциального роста со временем амплитуды апериодических движений.

Влияние вязкости жидкости

В последующих теоретических работах Рэлея [4], Бассета [5] и Вебера [6] исследовано влияние вязкости жидкости на условия разбиения струи на капли. Выяснилось, что вязкость жидкости, не влияя на ширину диапазона длин неустойчивых волн, играет стабилизирующую роль в феномене распада струи на капли, увеличивая длину волны, обладающей максимальным инкрементом, снижая величины инкрементов неустойчивых волн и увеличивая длину не распавшейся части струи. Последняя характеристика феномена распада струи на капли обусловлена реалиями проведения экспериментов со струями, которые под действием определенного давления вытекают из отверстий (например, из капилляров) с некой скоростью V. Характерное время отделения капли от струи τ определится величиной $\tau \sim \eta_{\max}^{-1}$. За это время торец струи (место отрыва капли) удаляется от среза капилляра на расстояние $L \sim V\cdot\eta_{\max}^{-1}$. Величина L и определяет не распавшуюся часть струи.

Для идеальной жидкости зависимости от времени поля скоростей течения жидкости, поля давлений и формы струи в области устойчивости были чисто периодическими: $\sim \exp(i\omega t)$, где ω – вещественная частота. Для вязкой жидкости частота становится комплексной: $s \equiv \omega + i\beta$, где β – декремент затухания, обусловленного влиянием вязкого трения. Проведенные исследования показали, что дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту s волн на поверхности цилиндрической струи вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом кинематической вязкости ν и волновым числом k, имеет вид [7]:

$$s^2+\frac{2\nu x^2 s}{I_0(x)R_0^2}\left[I_1'(x)-\frac{2xq}{x^2+q^2}\frac{I_1(x)}{I_1(q)}I_1'(q)\right]=$$
$$=\frac{\gamma x^2}{\rho R_0^3}\left(1-x^2\right)\frac{I_1(x)}{I_0(x)}\frac{q^2-x^2}{q^2+x^2},$$

где $q^2 \equiv x^2+\left(sR_0^2/\nu\right)$; $I_n(x)\equiv i^n I_n(ix)$ – модифицированные функции Бесселя. При $x^2 < 1$ появляются чисто вещественные решения этого дисперсионного уравнения: одно определяет декремент затухания β, а другое – инкремент η неустойчивости волны. Выражение для инкремента имеет максимум при определенном волновом числе $k_{\max}$, положение которого зависит от условия обращения в ноль производной от η по волновому числу.

Влияние вязкости на закономерности распада струи на капли удобно проанализировать в пределе длинных волн, когда длина волны много больше радиуса струи, то есть когда выполняются условия: $x \equiv kR_0 \ll 1$, $qR_0 \ll 1$. В этом случае дисперсионное уравнение принимает более простой вид:

$$s^2+\frac{2\nu x^2 s}{R_0^2}=\frac{\gamma x^2}{\rho R_0^3},$$

а его решения легко выписываются. Легко найти, что величина инкремента неустойчивости достигает своего максимального значения при

$$k_{\max} = 1\Big/\sqrt{2\nu R_0\sqrt{(\rho R_0/\gamma)} + 2R_0^2}\,.$$

Величина инкремента неустойчивости определится выражением

$$\eta_{\max} = \sqrt{\gamma/8\rho R_0^3}\Big/\left(1+\nu\sqrt{2\rho/\gamma R_0}\right).$$

Если вязкость жидкости велика так, что выполняется условие $\sqrt{\gamma R_0/\rho\nu^2} \gg 1$, то для $k_{\max}$ и $\eta_{\max}$ получим соответственно

$$k_{\max} \approx 0{,}5\cdot\sqrt[4]{\gamma/\nu^2\rho R_0^3},\ \eta_{\max} \approx \gamma/6\nu\rho R_0\,.$$

Характерное время распада струи определится выражением $\tau \sim \eta_{\max}^{-1} = 2\nu\rho R_0/\gamma$, а длина не распавшейся части струи – $L \approx V\cdot 2\nu\rho R_0/\gamma$.

Влияние окружающей среды

В реальных условиях движущаяся со скоростью V струя окружена воздухом, который можно моделировать несжимаемой жидкостью, когда V много меньше скорости звука. Очевидно, что граничные условия на поверхности струи, окруженной внешней средой, будут отличаться от граничных условий на поверхности струи в вакууме. Моделируя в простейшей ситуации жидкость движущейся струи и неподвижную окружающую среду идеальными несжимаемыми жидкостями, при $V \neq 0$, на границе раздела сред будем иметь тангенциальный скачок поля скоростей, то есть получим аналог ситуации, приводящей к реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В отличие от капиллярной неустойчивости струи, имеющей, как отмечалось выше, апериодический характер, так что временная зависимость решения записывается в виде ~ $\exp(\eta t)$, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца соответствует экспоненциальному росту со временем амплитуды неустойчивой волны ~ $\exp(\eta t)\cdot\cos(\omega t)$, то есть является колебательной. Из общефизических соображений очевидно, что в указанных условиях наличие внешней для струи среды будет приводить к ее дестабилизации, что и было обнаружено Рэлеем и Бассетом в [5, 8]. Впоследствии эта проблема исследовалась при различных усложняющих предположениях [9]. Для рассматриваемых в настоящем разделе заряженных струй указанная проблема изучена недавно [10]. Дисперсионное уравнение, описывающее частоты капиллярных волн на поверхности заряженной струи с поверхностной плотностью электрического заряда χ, массовой плотностью ρ_2, движущейся с постоянной скоростью U_0 относительно материальной среды с плотностью ρ_1, в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_2 = \gamma = 1$, имеет вид:

$$s_{1,2} = \frac{\delta_m}{\beta_m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{\beta_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}};$$

$$\beta_m \equiv \rho H_m^{-1} - D_m^{-1} \equiv \frac{\rho D_m - H_m}{D_m H_m};$$

$$\delta_m(k,U_0) \equiv k\rho U_0 H_m^{-1};$$

$$\kappa_m \equiv \left\{\left[1 - m^2 - k^2 - w(1+H_m)\right] - We\cdot k^2 H_m^{-1}\right\};$$

$$H_m(k) \equiv m - \frac{k\,K_{m+1}(k)}{K_m(k)};$$

$$D_m(k) \equiv m + \frac{k\,I_{m+1}(k)}{I_m(k)};\ w \equiv 4\pi\chi^2;$$

$$We \equiv \rho U_0^2,$$

где K_m – модифицированные функции Бесселя второго рода. Расчёты показывают, что наличие тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи приводит к периодической неустойчивости (типа неустойчивости Кельвина-Гельмгольца) волн и носит дестабилизирующий характер. Ширины диапазонов волновых чисел неустойчивых волн и величины инкрементов неустойчивости зависят от квадрата напряженности электростатического поля и квадрата скорости относительного движения, увеличиваясь с ростом напряженности поля и скорости.

Качественно подобные результаты получаются и для незаряженной струи в коллинеарном электростатическом поле [11–12].

2. КАПИЛЛЯРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ И РАСПАД СТРУЙ В РАДИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Еще на заре исследования электрических явлений Вильям Гилберт заметил, что капля воды на сухой подложке приобретает коническую (вершиной вверх) форму, если над ней на небольшом расстоянии поместить наэлектризованный кусок янтаря. Как было показано уже в наше время [13–14], при этом на свободной поверхности капельки появляется индуцированный электрический заряд, и она деформируется к вытянутому сфероиду. На вершине сфероида за счет суперпозиции высоких мод осцилляций капли формируется эмитирующий выступ, названный «конусом Тейлора», с вершины которого выбрасывается тоненькая струйка воды, распадающаяся на отдельные капельки. По-видимому, первые наблюдения эмиссии струек жидкости, распадающихся на отдельные капельки, при электризации свободной поверхности последней связаны с работами аббата Ж. Ноле, одного из первых исследователей электрических явлений. В середине XVIII века он заметил, что если человека поместить на изолирующую подставку и подвергнуть электризации, то из ранок и порезов на его коже начинают бить очень тонкие струйки крови, распадающиеся на отдельные капли.

В конце XIX века Рэлей создал строгую теорию капиллярного распада струй, обобщившую итоги экспериментов Савара, Магнуса, Плато, Бидона, и, в частности, провел эксперименты по исследованию влияния электризации на закономерности капиллярного распада струи на капли. Он обратил внимание на то, что, если к струе, вытекающей из некого отверстия и распадающейся на некотором расстоянии L от него на капли, поднести слегка наэлектризованное тело, распад струи на капли прекращается, то есть увеличивается длина не распавшейся части струи L. Если же подносимое к последней тело сильно наэлектризовано, то длина не распавшейся части струи сокращается, а каплеобразование идет с большей скоростью. Суть феномена дестабилизации струи под влиянием сильной электризации можно понять из нижеследующих рассуждений, высказанных Бассетом [5].

Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя идеальной несжимаемой электропроводной жидкости кругового сечения радиуса R_0, окруженная соосным цилиндрическим электродом радиуса $R_* >> R_0$. Примем, что между струей и внешним электродом поддерживается постоянная разность потенциалов так, что на невозмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности струи однородно распределен электрический заряд с плотностью χ так, что $\mu \equiv 2\pi R_0\chi$ – заряд, приходящийся на единицу длины струи. Поправка к потенциальной энергии электрического поля в окрестности свободной поверхности струи, появляющаяся вследствие искажения ее исходной цилиндрической поверхности осесимметричным капиллярным волновым движением теплового происхождения, запишется в виде

$$U_\chi = -\frac{\mu^2}{2}\frac{a_0^2}{R_0^2}[1 - \frac{x\cdot K_1(x)}{K_0(x)}].$$

Подставляя это выражение в функцию Лагранжа, определенную на основе потенциальной энергии капиллярных сил (1) и кинетической энергии волнового движения в струе (2), легко выписать уравнение Лагранжа для отдельных волн и, отыскивая в области $x^2 > 1$ решения ~ $\exp(i\omega t)$, получить дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3}\Big[x^2 - 1 + w\cdot H_0(x)\Big]\cdot D_0(x);$$

$$w \equiv \frac{\mu^2}{\pi R_0 \gamma}.$$

В диапазоне длин волн $x < 1$ решения уравнения Лагранжа имеют экспоненциально нарастающий либо экспоненциально убывающий со временем вид, то есть $a_0 \sim \exp(\pm\eta t)$, где η – вещественное. Тогда

$$\eta^2 = -\frac{\gamma}{\rho R_0^3}\Big[x^2 - 1 + w\cdot H_0(x)\Big]\cdot D_0(x). \qquad (3)$$

Дисперсионное уравнение такого вида с точностью до множителя $R_0/4$ при w, ошибочно появившегося в расчетах, было получено еще Бассетом [5]. Тейлор [15] исправил ошибку Бассета и записал дисперсионное уравнение в виде (3).

Из теоретических построений Бассета [5] следовало, что влияние электризации струи зависит от знака слагаемого $w\cdot H_0(x)$, учитывающего вклад электрического поля в потенциальную энергию струи в дисперсионном уравнении. Бассет выяснил, что при $x < 0{,}6$ вклад электрического поля в полную потенциальную энергию струи противоположен по знаку вклада капиллярных сил. Следовательно, наличие на струе электрического заряда приводит к ее стабилизации относительно виртуальных волновых возмущений из диапазона волновых чисел (как показывают более точные вычисления) $0 < k < 0{,}595\cdot R_0^{-1}$ в смысле снижения величин инкрементов неустойчивости волн из указанного диапазона волновых чисел. Для значений волновых чисел $x > 0{,}595$ инкременты неустойчивости быстро растут с увеличением поверхностной плотности заряда на струе (с увеличением w), так же как и $k_{\max}$ (волновое число волны, обладающей максимальной величиной инкремента неустойчивости).

Как видно из (3), наличие заряда на струе приводит к расширению диапазона длин устойчивых волн в область волн, более длинных по сравнению с волнами в незаряженной струе. В соответствии с анализом Рэлея на незаряженной струе граница между устойчивыми и неустойчивыми волнами определяется условием $x^2 = 1$. Согласно же результатам Бассета на заряженной струе граница между устойчивыми и неустойчивыми волнами определяется как $x^2 = \{1 - w\cdot H_0(x)\}$. При $x > 0{,}595$ слагаемое $w\cdot H_0(x)$ отрицательно, и, следовательно, положение границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами смещается в область больших волновых чисел или более коротких волн. Внутри диапазона волновых чисел, определенных неравенствами

$$0,595 \le x \le \sqrt{1 - w \cdot H_0(x)},$$

электрический заряд на струе увеличивает инкременты неустойчивости.

С формальной точки зрения из (3) следует, что в области $x < 0,595$, где функция $H_0(x)$ положительна, при достаточно больших w становятся устойчивыми наиболее длинные волны, удовлетворяющие условию

$$x^2 < w \cdot H_0(x) - 1. \tag{4}$$

При $x \to 0$ максимальное значение функции $H_0(x) \approx 1$. Это означает, что при $w > 1$ в окрестности точки $x = 0$ появляется область устойчивых волн с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению (4). С ростом параметра w размеры этой области увеличиваются. Иначе говоря, появляется левая по k граница области неустойчивости. Само геометрическое место точек на плоскости $\{k, w\}$, в котором цилиндрические волны на поверхности заряженной струи неустойчивы по отношению к дроблению на капли, определится системой неравенств:

$$w < 1:$$
$$0 \le x \le \sqrt{w \cdot |H_0(x)| + 1};\ w > 1:$$
$$\sqrt{w \cdot |H_0(x)| - 1} \le x \le \sqrt{w \cdot |H_0(x)| + 1}.$$

В области реализации неустойчивости капиллярные и электростатические силы, действующие на свободную поверхность струи, всегда осесимметричны и приводят к росту амплитуды виртуальной волны с максимальной при заданных условиях величиной инкремента. В таких условиях струя дробится на капли с размерами, уменьшающимися с ростом поверхностной плотности заряда на струе χ (с ростом параметра w) [16–18].

В зависимости от величины поверхностной плотности заряда на струе χ (величины параметра w) соотношение между осесимметричными капиллярными и электростатическими силами меняется, и в соответствии с данными экспериментов [16–18] можно выделить несколько режимов распада струи на капли. Неустойчивость, реализующуюся при отсутствии электрического заряда на струе (при $w = 0$), естественно назвать *капиллярной*.

При малых плотностях поверхностного заряда на струе χ (согласно (3) при $\chi < \sqrt{\left|\left(1 - x^2\right)/4\pi \cdot H_0(x)\right|}$), когда капиллярные силы преобладают над электрическими $(1 - x^2) > w \cdot H_0(x)$, неустойчивость следует именовать *капиллярно-электростатической*. При большой поверхностной плотности заряда, когда в приведенных соотношениях выполняются противоположные неравенства, неустойчивость будем называть *электростатически-капиллярной*.

3. КАПИЛЛЯРНЫЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ И РАСПАД СТРУЙ В РАДИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При исследовании осцилляций и устойчивости заряженных струй особый интерес представляет изучение неосесимметричных волн на струе, описываемых функциями более общего вида по сравнению с осесимметричными, а именно $\sim \exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(st)$, где φ – азимутальный угол; m – азимутальное число, отличное от нуля. Осесимметричная волна в таком представлении соответствует ситуации $m = 0$. Волна с $m = 1$ – изгибной волне, а с $m = 2$ – изгибно-деформационной. Для незаряженной струи при отсутствии внешних силовых воздействий неосесимметричные волны всегда устойчивы, независимо от длины волны. Они могут стать неустойчивыми только при отличной от нуля поверхностной плотности заряда.

Говоря о неосесимметричных волнах, прежде всего будем иметь в виду изгибные волны [19–20] и изгибно-деформационные [21–22], так как именно их (опуская из рассмотрения осесимметричные волны) неустойчивость фиксируется в экспериментах [17–18, 23]. Волны с $m > 2$ становятся неустойчивыми при напряженностях электростатического поля у поверхности струи, больших критической, для зажигания коронного разряда [21–22].

Тейлор [15] экспериментально и теоретически исследовал изгибную неустойчивость струи для произвольной длины волны, связанную с возбуждением изгибной моды с $m = 1$. Он отталкивался от известного по экспериментальным исследованиям факта, что при достаточно большой плотности заряда на струе ее конец начинает совершать хлыстообразное движение, распадаясь при этом на отдельные капельки. Тейлор записал форму струи в виде

$$r = R_0 + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\varphi) \cdot \exp(i\omega t)$$

и получил дисперсионное уравнение для изгибной неустойчивости струи идеальной несжимаемой заряженной электропроводной струи:

$$\omega^2 = -\frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{x \cdot I_1'(x)}{I_1(x)} \{x^2 + w[1 + \frac{x \cdot K_1'(x)}{K_1(x)}]\}, \tag{5}$$

где штрих у модифицированных функций Бесселя означает производную по аргументу. Из полученного дисперсионного уравнения следовало, что мода с $m = 1$ неустойчива при любых значениях поверхностного заряда, поскольку выражение, стоящее в квадратных скобках, всегда отрицательно. Приравнивая нулю выражение, стоящее в фигурных скобках, можно получить положение правой границы диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым изгибным волнам при заданном w.

В [19, 24–25] теоретическим аналитическим образом исследовано влияние вязкости и напряженности электрического поля на устойчивость неосесимметричных волн произвольных длин на поверхности заряженных струй идеально электропроводной жидкости. Показано, что в ситуации большой вязкости инкремент неустойчивости изгибной моды с $m = 1$ может превышать инкремент неустойчивости осесимметричной моды. И делается вывод, что вязкость сильнее подавляет неустойчивость осесимметричной моды по сравнению с неосесимметричными модами с $m \ge 1$. Критические условия реализации длинных волн m-й моды имеют вид: $w = (m + 1)$. При больших напряженностях электрического поля у поверхности струи инкремент неустойчивости моды с $m = 2$, так же как и инкремент изгибной моды с $m = 1$, может превышать таковой для осесимметричной моды. В ситуации большой вязкости максимальным инкрементом неустойчивости из осесимметричных волн обладают бесконечно длинные волны ($k = 0$), что приводит к разрыву струи на большие куски.

В пределе малой кинематической вязкости ν, в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \gamma = \rho = 1$, имеющих вид

$$S^2 + 2S\nu \cdot F(k,m) = \qquad (6)$$

$$= f(k,m,w) \cdot D(k,m) + O(\nu^2);$$

$$F(k,m) \equiv \left(k^2 + m^2 - D(k,m)\right);$$

$$f(k,m,w) \equiv 1 - m^2 - k^2 - w \cdot H(k,m).$$

Несложно видеть, что при $\nu = 0$ и $m = 1$ (6) приводится к (5). При

$$0 < f(k,m,w) < \nu^2 F^2(k,m) / D_m(k)$$

решения вещественные, причем одно положительно, а другое отрицательно. Вещественное отрицательное решение дает декремент апериодического затухания виртуальной деформации, а вещественное положительное решение определяет инкремент неустойчивости цилиндрической волны, имеющий вид:

$$\eta(x,m) = -\nu \cdot F(x,m) + \sqrt{\nu^2 \cdot F^2(k,m) + f(k,m,w) \cdot D_m(k)}. \qquad (7)$$

Знак множителя $f(k, m, w)$ в существенной степени определяется функцией $H_m(k)$. Принимая во внимание то обстоятельство, что произведение $w \cdot H_m(k)$ определяет вклад электрического поля в величину множителя $f(k, m, w)$, несложно видеть, что стабилизирующую роль ($H_m(k) > 0$) заряд на струе играет только для осесимметричной волны ($m = 0$) при $k \le 0{,}595$. Для значений $k > 0{,}595$ и $m = 0$, а также при любых k и $m > 0$ заряд на струе играет дестабилизирующую роль, так как $H_m(k) < 0$.

Волновое число волны с максимальным значением инкремента $k = k_{\max}$ найдется из условия [7]:

$$\left(d\eta(k,m)/dk\right) = 0.$$

В итоге можно найти значение параметра $w = w_{\max}$, то есть то значение поверхностной плотности электрического заряда, при котором инкремент неустойчивости волны с $k = k_{\max}$ максимален.

Подставляя $k_{\max}$ и $w_{\max}$ в (7), можно найти величину самого инкремента, соответствующего волне, наиболее быстро растущей со временем. Описанная процедура отыскания экстремальных значений $k_{\max}$ и $w_{\max}$ подобна процедуре поиска критических условий реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля [26]. Неосесимметричные волны с $m = 2$ и произвольными волновыми числами при $w < 2{,}904$ устойчивы. При $w = 2{,}904$ претерпевает неустойчивость волна с волновым числом $x = 0{,}789$. Реализация неустойчивости моды с $m = 2$ приводит к эллиптической деформации поперечного сечения струи и ее скручиванию относительно оси z. Ориентация осей эллипса в поперечном сечении струи зависит от времени и продольной координаты. Сама струя при этом имеет вид эллиптического цилиндра, скрученного вокруг оси. Реализация неустойчивости моды с $m = 2$ для объёмно-заряженной струи диэлектрической жидкости происходит через неустойчивость её боковой поверхности [27], тогда как объёмный электрический заряд в некой степени способствует стабилизации капиллярных волн [28].

Роль вязкости увеличивается с уменьшением радиуса струи, поскольку обезразмеривание коэффициента кинематической вязкости ν жидкости ведется на $\sqrt{\gamma R_0/\rho}$. И, следовательно, чем меньше радиус струи, тем меньше масштаб измерения вязкости для нее и тем сильнее влияние диссипации на закономерности распада струи.

4. ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Исследование устойчивости неосесимметричных волн на поверхности вязкой несжимаемой однородно объемно-заряженной струи диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_d (в модели «вмороженного заряда») проведено в [29] методом прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса. Математическая формулировка задачи отличается от такой же задачи для идеально проводящей жидкости необходимостью расчета электрического поля внутри и вне струи и заменой граничного условия постоянства потенциала на свободной поверхности последней в [24] на условие равенства его значений внутри и вне струи на границе раздела.

Для объемно-заряженных струй диэлектрических жидкостей [28–29] величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод снижаются по сравнению с идеально проводящей жидкостью и при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости ε_d. Эффект снижения инкрементов с уменьшением ε_d проявляется тем сильнее, чем меньше азимутальное число m (чем меньше степень неосесимметричности), и достигает максимума для осесимметричных мод ($m = 0$). Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями (например, водорода, гелия и т.п.) инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных условиях заметно превышать величины инкремента неустойчивости осесимметричных мод.

Экспериментально и теоретически в рамках методики вынужденного капиллярного распада струй [2] распад поверхностно заряженной струи диэлектрической жидкости изучался в [30]. Экспериментально обнаружено увеличение длины нераспавшейся части струи при увеличении поверхностной плотности электрического заряда. В теоретической формулировке задачи авторы [30] намеревались учесть эффект релаксации электрического заряда. Однако в уравнении баланса поверхностной плотности электрического заряда на свободной поверхности струи они потеряли слагаемое, пропорциональное средней кривизне струи, а потому результаты теоретического анализа [30] не вполне корректны и могут содержать ошибки как количественного, так и качественного характера. Здесь целесообразно отметить, что попыток учета эффекта релаксации электрического заряда, содержащих указанную ошибку, в задачах расчета линейной устойчивости струй было много, на что и указано в [31], где уравнение баланса строго выведено для произвольной криволинейной поверхности. Причина распространенности обсуждаемой ошибки в механическом переносе уравнения баланса, выписанного для плоской поверхности и не содержащего слагаемого, пропорционального средней кривизне невозмущенной поверхности жидкости на криволинейную поверхность.

От задач, решаемых в модели идеально проводящей или идеально диэлектрической жидкости, задача расчета волнового движения на заряженной поверхности жидкости с конечной проводимостью отличается тем, что локальное значение поверхностной плотности электрического заряда на струе является функцией координат и времени. Математическая формулировка задачи по сравнению с идеально проводящей струей пополняется уравнением баланса поверхностной плотности заряда:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\sigma\cdot\vec{n}\cdot\nabla\Phi^{in}+\nabla_S\cdot\left(\chi\vec{U}+\chi bE_\tau\cdot\vec{\tau}\right)+\chi\frac{U_r}{r}=0;$$

$$\nabla_S\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z;$$

$$4\pi\chi=\vec{n}\cdot\left(\varepsilon_d\nabla\Phi^{in}-\nabla\Phi^{ex}\right).$$

Здесь σ – удельная проводимость реальной жидкости; b – подвижность носителей заряда в жидкости; $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$ – орты осей цилиндрической системы координат; $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – орты нормали и касательной к поверхности струи; Φ^{in} и Φ^{ex} – потенциалы электрического поля внутри и вне струи; U_r – нормальная компонента поля скоростей.

При записи уравнения баланса принято, что ее электрический потенциал выравнивается вдоль ее свободной поверхности за счет трех механизмов: 1) нормального к свободной поверхности тока проводимости, приводящего к выравниванию потенциала за характерное время максвелловской релаксации $\tau \sim \varepsilon_d/\sigma$; 2) переноса носителей заряда касательными к поверхности течениями жидкости, связанными с волновым движением в струе, выравнивающим потенциал поверхности за время порядка периода волны; 3) направленного переноса ионов вдоль свободной поверхности струи, касательной к поверхности компонентой напряженности электрического поля $\left(\vec{E}\cdot\vec{\tau}\right)$, со скоростью движения ионов по поверхности $\vec{V}$, определяемой соотношением $\vec{V}=b\left(\vec{E}\cdot\vec{\tau}\right)\vec{\tau}$, где b – подвижность инов, принимаемая для нижеследующих оценок одинаковой для ионов разных знаков.

В пределе $\sigma\to\infty$, $\varepsilon_d\to\infty$ дисперсионное уравнение задачи, имеющее весьма громоздкий вид и неразрешимое в общем виде, приводится к (6).

При анализе решений дисперсионного уравнения выяснилось [29], что чисто релаксационные движения жидкости в струе имеют формально-периодический характер, но декремент их затухания весьма велик. Они приводят к дополнительному (по сравнению с идеально электропроводной жидкостью) рассеиванию энергии в струе, увеличивая декременты затухания и снижая инкременты неустойчивости. Влияние эффекта релаксации заряда наиболее заметно сказывается на капиллярных движениях в струях слабопроводящих жидкостей.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В реальных установках для электродиспергирования жидкости, применяющихся в разнообразных приложениях феномена, используется система электродов, отличная от рассмотренной выше. Электродиспергирование происходит в системе электродов типа «игла-плоскость» [17–18] или «плоскость-игла-плоскость» [15], когда продольная компонента электрического поля весьма велика. То же относится и к капле, выбрасывающей струи при реализации неустойчивости во внешнем электростатическом поле [23]. В таких системах электродов электрическое поле в окрестности струи реальной жидкости ориентировано преимущественно вдоль струи, а не радиально-симметрично. В этой связи встает проблема исследования устойчивости и капиллярного распада струй в продольном электрическом поле.

В [32] в рамках энергетического подхода Рэлея рассмотрена устойчивость осесимметричной волны на поверхности идеальной несжимаемой цилиндрической струи диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_d^{(1)}$ в продольном электростатическом поле $\vec{E}_0$ и сделан вывод, что такое поле увеличивает устойчивость струи. Дифференциальные уравнения (уравнения Лагранжа) для отыскания временной зависимости амплитуд a осесимметричных волн на струе согласно [32] имеют вид

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \left(\frac{\gamma}{\rho R_0^3}\right) \left[\left(1-x^2\right) - W\frac{(\varepsilon_d^{(2)}-\varepsilon_d^{(1)})^2\cdot x\cdot I_0(x)\cdot K_0(x)}{\left[\varepsilon_d^{(1)} I_1(x)K_0(x)-\varepsilon_d^{(2)} I_0(x)K_1(x)\right]}\right] \left(\frac{x\cdot I_1(x)}{I_0(x)}\right)a;$$

$$W \equiv E_0^2 R_0 / 4\pi\gamma.$$

Здесь $\varepsilon_d^{(2)}$ – диэлектрическая проницаемость окружающей среды. Из этого уравнения, задаваясь видом искомого решения: $\sim \exp(i\omega t)$ или $\sim \exp(\eta t)$, в зависимости от знака множителя при амплитуде a справа можно получить дисперсионное уравнение. Видно, что короткие капиллярные осесимметричные волны, для которых $x > 1$, на струе динамически устойчивы, независимо от наличия электрического поля. Длинные капиллярные волны с $x < 1$ будут приобретать устойчивость с ростом напряженности внешнего продольного электростатического поля. При заданном значении величины напряженности электрического поля левая граница диапазона волновых чисел устойчивых волн ($x = 1$ при отсутствии электрического поля) определится из соотношения

$$\frac{\left[\varepsilon_d^{(1)} I_1(x)\cdot K_0(x)-\varepsilon_d^{(2)}\cdot I_0(x)\cdot K_1(x)\right]}{(\varepsilon_d^{(2)}-\varepsilon_d^{(1)})^2(1-x^2)\cdot x\cdot I_0(x)\cdot K_0(x)} = W.$$

С ростом напряженности поля эта граница смещается в область более малых волновых чисел (более длинных волн). Область же неустойчивых волн будет при этом сужаться, а величина инкремента наиболее неустойчивой из них уменьшаться. Естественно ожидать, что для некоторой критической величины напряженности поля область неустойчивости исчезнет совсем. Тем не менее можно показать, что в использованной в [32] модели идеальной жидкости для как угодно большой величины напряженности поля существует область значений волновых чисел в окрестности $x = 0$, в которой волны будут неустойчивы, хотя инкременты неустойчивости и будут малы. Как показано в [33], полное подавление неустойчивости не наблюдается ни при каких напряженностях поля. Саму неустойчивость осесимметричных волн следует именовать капиллярной, так как именно капиллярные силы приводят к дроблению струи, а электрические – мешают этому процессу.

Интересно, что заметное сужение диапазона волновых чисел, в котором реализуется капиллярная неустойчивость, имеет место при достаточно малых напряженностях внешнего поля. Диапазон неустойчивости при отсутствии поля (при $W = 0$): $x < 1$ при $\varepsilon_d^{(1)} = 80$ и $\varepsilon_d^{(2)} = 1$ снижается до $x < 0{,}82$ уже при $W = 0{,}001$ и до $x < 0{,}064$ при $W = 0{,}1$. Для сравнения отметим, что в нормальном к поверхности струи электрическом поле параметр $w \equiv \mu^2/\pi R_0\gamma$, являющийся аналогом W, начинает реально сказываться на ширине диапазона неустойчивых волн и на величинах инкрементов лишь при больших величинах, начинающихся с $w \sim 1$. По-видимому, именно этот эффект позволяет истолковать результаты экспериментов Рэлея [3] по стабилизации струй при малой их электризации, поскольку электризация струй вызывалась внешним электрическим полем, имеющим большую продольную составляющую. Усиление диспергирования струй при интенсивной электризации связано с усилением действия нормальной компоненты внешнего электрического поля.

Выводы [32] относительно стабилизирующего влияния продольного электрического поля на осесимметричные волны на поверхности струи совпадают с полученными в работе [34], где в рамках прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса для струи диэлектрической идеальной жидкости в продольном электростатическом поле в диэлектрической среде получено более общее дисперсионное уравнение для волн с произвольной симметрией:

$$\omega_m^2 \equiv D_m(k)$$
$$\left\{ k^2 + m^2 - 1 + w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} \cdot D_m(k) + \varepsilon_{ex} \cdot H_m(k)} \right\}.$$

Показано, что капиллярную неустойчивость в такой системе могут претерпевать только длинные осесимметричные волны. Ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн, начинающегося с нулевого значения, зависит от диэлектрических проницаемостей жидкости и внешней среды, а также квадрата напряженности электростатического поля. С ростом напряженности поля ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн быстро уменьшается, как и величина инкремента капиллярной неустойчивости, а также значение волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом.

В более поздних работах [35–37] выведено дисперсионное уравнение для волн с произвольной симметрией на заряженной струе вязкой диэлектрической жидкости при усложняющем влиянии релаксации заряда. Показано, что при определённых значениях физических параметров стабилизирующее капиллярные волны влияние внешнего электрического поля и дестабилизирующее влияние капиллярных и электростатических сил собственного заряда могут скомпенсировать друг друга как для осесимметричных волн, так и для осенесимметричных с большой степенью асимметрии. Неустойчивость изгибных волн полностью не подавляется и может быть реализована для достаточно малых значений волнового числа.

Во внешнем электрическом поле произвольной направленности неустойчивость изгибной деформации является периодической и для слабо проводящих струй охватывает практически весь диапазон волновых чисел. Диэлектрические свойства жидкости дают преимущество развитию изгибной неустойчивости более длинных волн. Диффузия заряда является дестабилизирующим фактором для коротких волн, приводя к их неустойчивости. При увеличении проводимости струи диффузия усиливает неустойчивость длинноволновых изгибных деформаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный обзор показал, что существующие сведения о распаде струй, выбрасываемых неустойчивой по отношению к собственному или индуцированному электрическому заряду свободной поверхностью жидкости, полны пробелов. Это препятствует построению единой физически ясной картины феномена. В качестве задач, которые желательно решить, следует отметить следующие:

1) изучить линейную устойчивость волн на свободной поверхности цилиндрической струи вязкой жидкости с реальной проводимостью в электростатическом поле, ориентированном под углом к оси симметрии невозмущенной струи;

2) исследовать устойчивость волн на струе вязкой жидкости в периодическом во времени электрическом поле;

3) выяснить устойчивость струи при наличии обдувающего её потока среды, ориентированного под углом к струе;

4) исследовать устойчивость коротких струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Спонтанный распад струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2012. 204 с.
2. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение.* Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
3. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). On the Instability of Jets. *P Lond Math Soc*. 1878, **10**, 4–13.
4. Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the Instability of a Cylinder of Viscous Liquid under Capillary Force. *Phil Mag*. 1892, **34**(5), 145–154.
5. Basset A.B. Waves and Jets in a Viscous Liquid. *Amer J Math*. 1894, **16**, 93–110.
6. Weber C. Zum Zerfall Eines Flussigkeitsstrahles. *Z Angew Math Mech*. 1931, **11**(3), 136–154.
7. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
8. Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces. *Phil Mag*. 1892, **34**(5), 177–180.
9. Eggers J. Physics of Liquid Jet. *Rep Prog Phys*. 2008, **71**(036), 1–79.
10. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А. Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды. *ЖТФ*. 2011, **81**(2), 16–22.

11. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O., Polyantsev N.A. The Effect of the Density of the Medium on the Stability of a Dielectric Liquid Jet Moving Collinearly to a Uniform Electrostatic Field. *Surf Eng Appl Electrochem.* 2011, **47**(5), 413–418.

12. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Полянцев Н.А. Об устойчивости цилиндрической струи, движущейся относительно материальной среды вдоль внешнего электростатического поля. *ЖТФ*. 2011, **81**(12), 56–42.

13. Григорьев А.И., Синкевич О.А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле. *Известия АН СССР. МЖГ*. 1985, (6), 10–15.

14. Cheng K.J. Capillary Oscillations of a Drop in an Electric Field. *Phys Lett*. 1985, **A112**(11), 392–396.

15. Taylor G. Electrically Driven Jets. *Proc Roy Soc*. 1969, **A313**, 453–470.

16. Tomita Yu., Ishibashi Yu., Yokoyama T. Fundamental Studies on an Electrostatic Ink Jet Printer. *Bulletin of JSME*. 1986, **29**(257), 3737–3743.

17. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic Spraying of Liquids: Main Functioning Modes. *J Electrostatics*. 1990, **25**, 165–184.

18. Jaworek A., Krupa A. Classification of the Modes of EHD Spraying. *J Aerosol Sci*. 1999, **30**(7), 873–893.

19. Saville D. Stability of Electrically Charged Viscous Cylinders. *Phys Fluids*. 1971, **14**(6), 1095–1099.

20. Ширяева С.О. Об изгибной неустойчивости объемно заряженной капиллярной струи диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2010, **80**(4), 24–32.

21. Григорьев А.И. Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости. *ЖТФ*. 2009, **79**(4), 36–45.

22. Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в коллинеарном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2011, **81**(6), 36–41.

23. Kim O.V., Dunn P.F. Control Production by in-flight Electrospraying. *Langmuir*. 2010, **26**, 15807–15813.

24. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости. *ЖТФ*. 2003, **73**(4), 5–12.

25. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2003, **73**(11), 22–30.

26. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.

27. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Об электростатической неустойчивости объемно заряженной струи диэлектрической жидкости. *ЭОМ*. 2009, **45**(6), 35–41.

28. Ширяева С.О., Григорьев А.И. О стабилизации капиллярной неустойчивости струи диэлектрической жидкости объемным эклектическим зарядом. *ЭОМ*. 2009, **45**(5), 9–17.

29. Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. Неосесимметричные осцилляции заряженной струи вязкой жидкости конечной проводимости. *ЖТФ*. 2008, **78**(2), 33–41.

30. Гиневский А.Ф., Мотин А.И. Особенности капиллярного распада струй диэлектрической вязкой жидкости с поверхностным зарядом. *ИФЖ*. 1991, **60**(4), 576–581.

31. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред. *ЖТФ*. 2004, **74**(11), 22–28.

32. Nayyar N.K., Murty G.S. The Stability of a Dielectric Liquid Jet in the Presence of a Longitudinal Electric Field. *Proc Phys Soc*. 1960, **75**(Pt.3, 483), 369–373.

33. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. О возможности полной стабилизации капиллярной неустойчивости струи диэлектрической жидкости продольным электростатическим полем. *ЭОМ*. 2009, **45**(3), 28–34.

34. Ширяева С.О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(2), 47–51.

35. Ширяева С.О. Об устойчивости объёмно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, (3), 57–68.

36. Ширяева С.О. Влияние феномена релаксации заряда на капиллярный распад заряженной струи диэлектрической жидкости в коллинеарном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2011, **81**(3), 18–27.

37. Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. On the Stability of a Bending Mode of a Charged Jet of Viscous Dielectric Liquid with the Ultimate Electroconductivity in a Collinear Electric Field. *Surf Eng Appl Electrochem.* 2011, **47**(2), 132–138.

Поступила 15.02.13

Summary

The article is a review of analytical calculations of the stability of a capillary wave motion on surfaces of charged jets of incompressible fluids in linear approximation on a small parameter, the latter being the ratio of the wave amplitude to the radius of a jet, under various complicating factors.

Keywords: jet, ideal conductive liquids, linear waves, electric charge, collinear electric field, viscosity, material medium, analytical computations.