

О дрейфовых свойствах волнового пакета, распространяющегося по заряженной поверхности жидкости

Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14/2, г. Ярославль 150000, Россия, e-mail: belonozhko@mail.ru

Построено аналитическое выражение для оценки влияния поверхностного электрического заряда на скорость дрейфа, инициируемого распространением волнового пакета по заряженной горизонтальной поверхности идеальной жидкости. Показано, что наиболее сильно поверхностный заряд влияет на дрейф, вызванный распространением волнового пакета, для которого значение волнового числа несущей волны равно величине, обратной капиллярной постоянной жидкости. Установлены общие закономерности, которым подчиняется исследованное дрейфовое движение.

Ключевые слова: дрейф Стокса, свободная поверхность, волновой пакет, перенос вещества, электрически заряженная поверхность.

УДК [532.59+532.65]:538.93

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое исследование поведения волновых возмущений на заряженной свободной поверхности жидкости началось в 30-х годах XX столетия с пионерских работ Л. Тонкса [1] и Я.И. Френкеля [2], в которых рассчитывались условия развития неустойчивости поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. Это явление лежит в основе принципа функционирования таких технических устройств, как жидкометаллические источники ионов, установки по электродиспергированию жидкостей, тесно связано с теорией грозового электричества (подробнее см. [3–5] и цитированную там литературу). Несмотря на постоянный интерес к исследованиям подобного рода со стороны специалистов самого разного профиля, до сих пор весьма слабо изучены закономерности поведения волновых возмущений при докритических – недостаточных для инициации неустойчивости – значениях поверхностной плотности электрического заряда. Интересно отметить, что докритический поверхностный электрический заряд играет роль регулятора дисперсионных свойств свободной поверхности – его величина определяет фазовую и групповую скорость волновых возмущений, способных распространяться по этой поверхности. В настоящей работе развивается аналитическая теория, позволяющая количественно оценить влияние докритического поверхностного электрического заряда на известную со времен Д.Г. Стокса способность нелинейных периодических волн вызывать дрейф жидких частичек вдоль направления распространения волны [6]. Скорость такого дрейфа пропорциональна квадрату амплитуды и частоте

волны. Задача рассматривается в постановке, учитывающей, что в общем случае периодические волны распространяются по поверхности жидкости в виде волновых пакетов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть идеальная, идеально проводящая жидкость с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести \vec{g} . Принимается, что в равновесном состоянии свободная поверхность жидкости равномерно заряжена с поверхностной плотностью электрического заряда k_0 . Рассматривается задача расчета среднего дрейфа жидких частиц, вызванного распространением вдоль свободной поверхности в направлении оси Ox простейшего волнового пакета Стокса – суперпозиции двух периодических бегущих волн с одинаковыми амплитудами a и с близкими волновыми числами $k_1 = k_0 + \Delta k$ и $k_2 = k_0 - \Delta k$ (значение k_0 характеризует волновое число несущей волны, а Δk – волновое число огибающей). Для простоты считается, что амплитуда волн мала по сравнению с длиной $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, а движение жидкости не зависит от горизонтальной координаты y .

Математическая формулировка задачи определения гидродинамического ϕ и электрического Φ потенциалов имеет вид [7]:

$$z > \xi: \nabla^2 \Phi = 0;$$

$$z < \xi: \nabla^2 \phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$-p_a + p + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi \rightarrow -E_0 \vec{e}_z; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi \rightarrow 0.$$

Функция $z = \xi(x, t)$ описывает изменяющуюся со временем форму свободной поверхности; p – давление в жидкости; p_a – атмосферное давление.

Поскольку явление дрейфа жидких частиц, вызванного распространением волн по свободной поверхности, – феномен второго порядка малости по амплитуде волны, то и решение задачи следует строить с надлежащей точностью. В соответствии с теорией волн малой амплитуды неизвестные величины представлялись в виде асимптотических рядов по безразмерному малому параметру $\varepsilon = ak_0$, пропорциональному отношению амплитуды несущей волны к ее длине [7]:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3).$$

Здесь нижние индексы указывают на порядок малости соответствующих слагаемых по ε , а символ Ландау O используется для обозначения порядка отброшенных слагаемых. С помощью выписанных асимптотических разложений исходная задача разбивается на задачи нулевого, первого и второго порядков малости по амплитуде волны.

В нулевом приближении получаются очевидные соотношения:

$$\Phi_0 = -E_0 z = -4\pi\kappa_0 z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} + p_a - \rho g z.$$

Здесь символом $E_0 = 4\pi\kappa_0$ обозначена напряженность однородного электрического поля над равномерно заряженной плоскостью.

Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид [7]:

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0; \quad z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0;$$

$$-\rho g \xi_1 - \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \quad (1)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0.$$

Математическая формулировка задачи второго порядка малости представляется в форме [7]:

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0; \quad (2)$$

$$z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0; \quad (3)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \quad (4)$$

$$-\rho g \xi_2 - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} =$$

$$= \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial t} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2; \quad (5)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}; \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_2 \rightarrow 0; \quad (7)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (8)$$

Для расчета поля скоростей во втором приближении по амплитуде волны необходимо последовательно решить обе задачи: сначала (1), затем (2)–(8). Однако если правильно учитывать специфику процедуры выделения средней скорости жидких частиц из общего решения, то задачу второго порядка малости (8)–(14) достаточно рассмотреть в более простой усеченной форме.

2. ПРИНЦИП РАСЧЕТА СКОРОСТИ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

Поле скоростей, построенное в результате решения задачи, сформулированной в предыдущем пункте $\vec{U}(\vec{r}, t) = \nabla \varphi$, определяет скорость различных жидких частиц, которые с течением времени, сменяя друг друга, проходят через фиксированную точку пространства с радиус-вектором \vec{r} (эйлерово поле скоростей). Нужно учитывать, что скорость индивидуальной жидкой частички описывается лагранжевым полем скоростей $\vec{U}_L(\vec{r}, t)$, определяющим в момент времени t скорость той частички, которая при $t = 0$ находилась в точке пространства с радиус-вектором \vec{r} . Для рассматриваемой задачи во втором приближении по амплитуде волны справедлива формула перехода от эйлерова описания к лагранжевому [6]:

$$\vec{U}_L(\vec{r}, t) = \vec{U}(\vec{r}, t) + \left(\int_0^t \vec{U}(\vec{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \vec{U}(\vec{r}, t).$$

Из выписанного соотношения несложно получить выражение для горизонтальной составляющей скорости индивидуальной жидкой частицы:

$$u_L = u(x, z, t) + \left(\int_0^t u(x, z, \tau) d\tau \right) \cdot \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x} +$$

$$+ \left(\int_0^t v(x, z, \tau) d\tau \right) \cdot \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z}.$$

Во втором приближении по амплитуде волны требуемая точность вполне обеспечивается формулой

$$u_L = u_1 + u_2 + \left(\int_0^t u_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\int_0^t v_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad (9)$$

где u_1 , v_1 – решение задачи (1), а u_2 – горизонтальная компонента поля скоростей, рассчитанного в результате решения задачи второго порядка малости (2)–(8).

Для определения средней горизонтальной дрейфовой скорости в формуле (9) необходимо отбросить быстро меняющиеся со временем периодические слагаемые, отвечающие за циклические движения жидкой частички, совершаемые ею в процессе распространения волны. Именно поэтому требуется не полное выражение для u_2 , а только постоянные и медленно меняющиеся со временем составляющие этой величины. В следующем пункте смысл понятий «быстрые» и «медленные» слагаемые будет определен более конкретно.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи первого порядка малости легко получить классическими методами [7]:

$$\xi_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) + a \cos(\omega_2 t - k_2 x);$$

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = a \omega_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \exp(k_1 z) + a \omega_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \exp(k_2 z);$$

$$v_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -a \omega_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \exp(k_1 z) - a \omega_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \exp(k_2 z); \quad (10)$$

$$\Phi_1 = a E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \exp(-k_1 z) + a E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \exp(-k_2 z);$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega = \omega_0 \pm V_g \Delta k;$$

$$\omega_0^2 = g k_0 (1 + k_0^2 \alpha^2 - k_0 \alpha W);$$

$$V_g = \frac{g(1 + 3k_0^2 \alpha^2 - 2k_0 \alpha W)}{2\omega_0}.$$

Здесь ω_0 – средняя частота волнового движения, $V_g = (\partial\omega/\partial k)_{k=k_0}$ – групповая скорость волны, $\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}$ – капиллярная постоянная жидкости; $W = E_0^2 / (4\pi\sqrt{\rho g \gamma}) = 4\pi\kappa_0^2 / \sqrt{\rho g \gamma}$ – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на гребнях волн (безразмерный квадрат поверхностной плотности электрического заряда).

Соотношения (10) для величин ξ_1 , u_1 , v_1 , Φ_1 с помощью стандартных тригонометрических преобразований сводятся к выражениям, пропорциональным произведениям вида [8]:

$$\sim \cos(\omega_0 t - k_0 x + \beta) \cos(\Delta\omega t - \Delta k x + \chi), \quad (11)$$

где β и χ – константы, появляющиеся в результате вычислений. Произведения вида (11) описывают распространение волнового пакета, несущая модулированная составляющая которого имеет период $T = 2\pi/\omega_0$, а амплитудная огибающая – период $\tau = 2\pi/\Delta\omega \gg T$. Значения T и τ – естественные характерные временные масштабы быстрых и медленных изменений, происходящих с кинематическими и динамическими величинами задачи.

Подставляя выражения (10) в правые части соотношений (2)–(8), несложно получить для задачи второго по амплитуде волны порядка малости следующие граничные условия:

$$z = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= 2a^2 \Delta k \omega_0 \sin(2(x\Delta k - t\Delta\omega)) + a^2 \Pi(t) - \\ &- \rho g \xi_2 - \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \\ &= a^2 \left(-2\Delta\omega^2 \rho + \frac{\Delta k^2 E_0^2}{2\pi} \right) \cos(2(x\Delta k - t\Delta\omega)) + a^2 \Pi(t); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = a^2 k_0 E_0 [1 + \cos(2(x\Delta k - t\Delta\omega))] + a^2 \Pi(t).$$

Здесь $\Pi(t)$ – общее обозначение для быстро меняющихся со временем циклических слагаемых с характерным периодом $\sim T$. Эти слагаемые отвечают за быстрые циклические движения жидких частиц около положения равновесия и не вносят вклад в средний дрейф вещества вдоль свободной поверхности. Явно выписанные слагаемые характеризуются периодом $\sim \tau$.

Для определения средней дрейфовой составляющей течения достаточно рассмотреть решение задачи второго порядка малости (2), (3), (7), (8) с условиями (12) на границе, в правых частях которых отброшены «быстрые» циклические слагаемые $\Pi(t)$. Решение такой усеченной задачи легко строится:

$$u_2 = 2a^2 \omega_0 \Delta k \cos(2(x\Delta k - t\Delta\omega)) \exp(2z\Delta k). \quad (13)$$

Принимая во внимание малость Δk , при построении выражения (13) и далее пренебрегается слагаемыми порядка Δk^2 и выше.

Подставляя выражения для u_1 и v_1 из (10) вместе с соотношением (13) в (9), аналитически вычисляя возникающие интегралы, несложно перейти от описания поля скоростей в эйлеровых переменных к переменным Лагранжа. Сохраняя в полученном выражении только постоянные и медленно меняющиеся слагаемые, легко выписать соотношение для средней горизонтальной скорости жидких частиц, увлекаемых волновым пакетом в направлении распространения волны:

$$U_d = a^2 \left\{ (k_0 \omega_0 - k_0 V_g \Delta k - \omega_0 \Delta k) \exp(2z(k_0 - \Delta k)) + (k_0 \omega_0 + k_0 V_g \Delta k + \omega_0 \Delta k) \exp(2z(k_0 + \Delta k)) + 2\omega_0 (k_0 \exp(2zk_0) + \Delta k \exp(2z\Delta k)) \cos(2\Delta k(x - tV_g)) \right\}. \quad (14)$$

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для правильного анализа задачи следует обратить внимание на физический механизм инициации среднего дрейфового движения жидких частиц. В процессе распространения по свободной поверхности жидкости периодической волны жидкие частички совершают в вертикальной плоскости петлеобразные движения. В первом приближении по амплитуде волны часто говорят просто о движении жидких частиц, расположенных непосредственно на поверхности, по окружностям с радиусом, равным амплитуде волны [9]. Однако это приближение является довольно грубым. В связи с затуханием движения с глубиной нижняя часть траектории жидкой частички оказывается на величину порядка квадрата амплитуды волны короче верхней. В результате через период волнового движения жидкая частичка возвращается не в исходное положение, а в несколько смещенное относительно его в направлении распространения волны. С течением времени эти систематические смещения складываются в средний дрейф, скорость которого пропорциональна квадрату амплитуды волнового движения. Когда по электрически нейтральной поверхности жидкости распространяется только одна капиллярно-гравитационная периодическая волна со строго определенным волновым числом k , возникающее среднее течение называется «дрейф Стокса». Скорость дрейфа Стокса рассчитывается по формуле [6]:

$$U_S = a^2 \omega_a k \exp(2kz); \quad \omega_a = \sqrt{gk(1 + k^2 \alpha^2)}. \quad (15)$$

Здесь ω_a – круговая частота капиллярно-гравитационной волны; α – капиллярная постоянная жидкости. Наибольшую дрейфовую скорость имеют жидкие частички, находящиеся непосредственно на поверхности, – радиус их петлеобразных движений определяется амплитудой волны. С глубиной амплитуда циклических движений жидких частиц экспоненциально уменьшается, и вместе с ней уменьшается интенсивность среднего дрейфа. Для формирования дрейфа принципиально важно, чтобы движение жидких частичек имело циклический характер. Чем больше частота волнового движения, тем чаще жидкая частичка испытывает периодическое смещение вдоль направления распространения волны и поэтому тем больше скорость дрейфа.

В случае заряженной поверхности жидкости эволюция волнового возмущения может происходить не только по волновому, но и по аперидическому закону. На рис. 1 на плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$, характеризующих волновое число и поверхностный заряд, построена кривая устойчивости волновых возмущений заряженной свободной поверхности, определяемая уравнением [2]:

$$W_c = \frac{1}{\alpha k} + \alpha k. \quad (16)$$

Область 1 под кривой $W < W_c$ соответствует волновым возмущениям, на гребнях которых капиллярные силы преобладают над электрическими, и эволюция возмущения происходит по законам распространения бегущей волны. Область 2 над кривой соответствует условиям $W > W_c$, при которых на гребне волнового возмущения любой малой амплитуды электрические силы преобладают над капиллярными, вызывая экспоненциальный рост амплитуды возмущения без каких-либо периодических составляющих движения. Этот режим эволюции возмущения представляет собой начальную стадию развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. На практике при $W > W_c$ на поверхности жидкости наблюдается формирование конусообразных выступов – конусов Тейлора, с которых происходит эмиссия маленьких сильно заряженных капелек в перпендикулярном к свободной поверхности направлении [3–5].

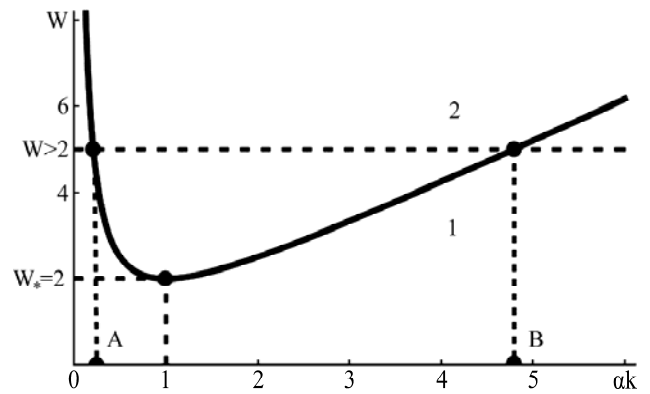


Рис. 1. Граница раздела области устойчивости и неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда на плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$, характеризующих волновое число и квадрат поверхностной плотности электрического заряда.

Для настоящего рассмотрения принципиально важно, что при $W < W_c$ эволюция волновых возмущений реализуется в виде бегущих волн, а при $W > W_c$ возмущение эволюционирует по аперидическому закону (с частотой, равной нулю). Очевидно, что требующее циклического движения явление дрейфа реализуется только в усло-

виях $W < W_c$. На самом деле ограничение еще сильнее. Как видно из рис. 1, если величина поверхностной плотности электрического заряда превышает значение, при котором $W > W_* = 2$, в бесконечном спектре инфинитезимальных волновых возмущений, существующих на свободной поверхности уже в силу теплового движения молекул жидкости, имеются неустойчивые волновые числа, соответствующие аperiodически нарастающим возмущениям. На рис. 1 для проведенного штрихом некоторого уровня $W = \text{const} > 2$ интервал неустойчивых волновых чисел обозначен АВ. Нарастание амплитуд неустойчивых возмущений приводит к формированию на свободной поверхности сильно нелинейных структур – конусов Тейлора, которые изменяют динамику свободной поверхности до такой степени, что развитая в настоящем изложении модель распространения слабо нелинейных волн перестает правильно описывать физическую ситуацию. Таким образом, выражение (14) правомерно использовать только для описания дрейфового движения, вызванного волновыми возмущениями при докритически ($W < 2$) заряженной свободной поверхности жидкости.

Из рис. 1 видно, что волновое число $k_* = \alpha^{-1}$ (для которого $\alpha k_* = 1$) обладает примечательным свойством: пороговое значение параметра W , выше которого возмущение с таким волновым числом становится неустойчивым, равно $W_* = 2$, тогда как для всех остальных волновых чисел пороговое значение W_c больше. Значение волнового числа $k_* = \alpha^{-1}$ с точки зрения неустойчивости заряженной поверхности по отношению к избытку электрического заряда соответствует волновому возмущению, наиболее чувствительному к наличию поверхностного заряда [1–5]. Представляется интересным обратить особое внимание на дрейф, инициируемый возмущением с таким волновым числом.

На рис. 2 показано поведение скорости среднего дрейфового течения, вызванного распространением волн по электрически нейтральной поверхности жидкости ($W = 0$), в зависимости от горизонтальной координаты для двух модельных ситуаций: классический дрейф Стокса и дрейф, вызванный распространением простейшего волнового пакета. В качестве параметров жидкости использовались характеристики воды: $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72 \text{ дин/см}$.

Постоянная скорость дрейфа Стокса U_S рассчитана по формуле (15) в предположении, что среднее течение вызвано гармонической бегущей волной с волновым числом $k = k_* = \alpha^{-1} = 3,7 \text{ см}^{-1}$ и амплитудой $a = a_0 = 0,10 \times \lambda_0 = 0,10 \times 2\pi/k_0 \approx 0,17 \text{ см}$. Дрейфовое движение оценивалось на уровне $z = 0$.

Периодическая кривая на рис. 2 описывает дрейфовую скорость U_d , связанную с распространением волнового пакета, образованного суперпозицией двух гармонических бегущих волн с равными амплитудами ($a = a_0/2 \approx 0,08 \text{ см}$) и мало отличающимися волновыми числами ($k_{1,2} = k_* \pm 0,1 \text{ см}^{-1}$). Зависимость построена по формуле (14) при $k_0 = k_*$, $z = 0$ в момент времени $t = 0$. С течением времени эта зависимость смещается вправо с групповой скоростью $V_g \approx 23 \text{ см/с}$.

Из рис. 2 видно, что в отличие от классического дрейфа Стокса распространение по поверхности волнового пакета вызывает не постоянное, а периодически изменяющееся вдоль направления распространения волны дрейфовое движение. Как и в случае с постоянным дрейфом Стокса, имеет место пропорциональность квадрату амплитуды, вызывающей дрейф волны. Амплитуда несущей волны волнового пакета оказывается модулированной – она изменяется вдоль горизонтальной оси. В результате дрейф максимален там, где амплитуда несущей волны максимальна (в точках экстремумов огибающей), и минимален там, где амплитуда несущей волны минимальна (в точках горизонтальной оси, в которых образующая волнового пакета пересекает нулевой невозмущенный уровень). Средняя – в смысле усреднения по периоду огибающей – дрейфовая скорость оказывается примерно вдвое меньше скорости классического дрейфа Стокса.

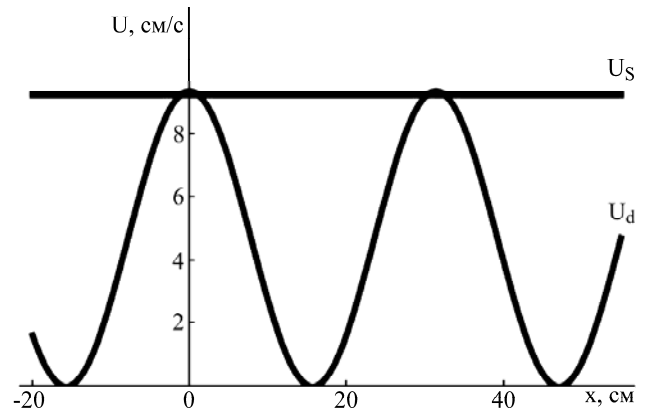


Рис. 2. Скорость дрейфа Стокса U_S , рассчитанная по формуле (15), при $k = \alpha^{-1} \approx 3,7 \text{ см}^{-1}$; $a = a_0 = 0,17 \text{ см}$; $z = 0$, и скорость дрейфа U_d , вызванного волновым пакетом, рассчитанная по формуле (14), при $k_0 = 3,7 \text{ см}^{-1}$, $a = a_0/2 \approx 0,08 \text{ см}$; $\Delta k = 0,10 \text{ см}^{-1}$; $z = 0$; $t = 0$. Жидкость – вода: $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72 \text{ дин/см}$.

Из формулы для круговой частоты ω_0 волнового движения, записанной после соотношений (10), видно, что с увеличением поверхностной плотности заряда (с увеличением W) значение ω_0 уменьшается. Для $k_0 = k_* = \alpha^{-1}$ она обращается в ноль при достижении параметром значения $W = 2$, выше которого поверхность становится

неустойчивой. Как было отмечено, частота волнового движения отвечает за периодичность систематического смещения жидкой частички в направлении распространения волны. При $\omega_0 = 0$ жидкая частичка перестает совершать петлеобразные движения и среднее дрейфовое движение прекращается. Таким образом, для волны с длиной $\lambda = 2\pi/k_* = 2\pi\alpha$ диапазон изменения скорости дрейфового движения за счет изменения поверхностного заряда составляет от максимального значения при $W = 0$ (при нулевой поверхностной плотности заряда) до нуля при $W = W_* = 2$. На рис. 3 показаны скорости дрейфового движения, вызываемого волновым пакетом со средним волновым числом $k_0 = \alpha^{-1} = 3,7$, при различных значениях параметра W .

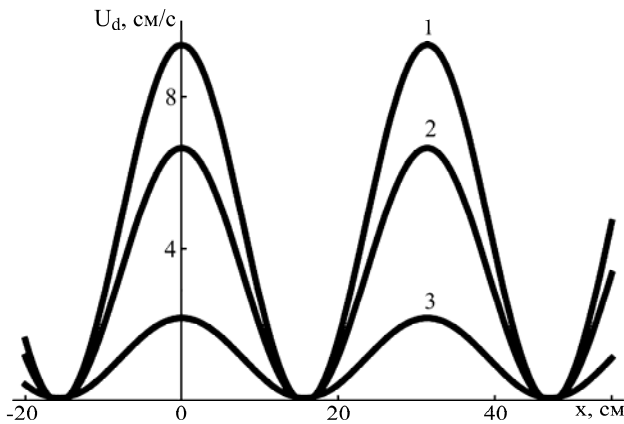


Рис. 3. Скорость дрейфа U_d (см. рис. 2) при различных значениях поверхностной плотности W электрического заряда: 1 – 0; 2 – 1,0; 3 – 1,9.

При докритических значениях поверхностной плотности заряда ($0 \leq W < 2$) чувствительность скорости дрейфа к изменению величины поверхностного заряда существенно снижается с удалением значения волнового числа от величины $k_* = \alpha^{-1}$ как в область коротких, так и в сторону более длинных волн. Рис. 4 и 5 иллюстрируют влияние электрического заряда на скорость среднего течения, вызванного волновыми пакетами, для которых волновые числа k_0 несущей волны равны $0,5\alpha^{-1}$ и $2\alpha^{-1}$. Непосредственным расчетом по формуле (14) несложно убедиться, что при $k \neq k_*$ изменение значений от $W = 0$ до $W = 2$ также уменьшает скорость дрейфа. Интенсивность дрейфа уменьшается от максимального значения при $W = 0$ до некоторой положительной величины, составляющей определенную долю от максимального значения при $W = 2$. Только для волнового числа $k_* = \alpha^{-1}$ относительное уменьшение скорости дрейфа, достигаемое при $W = 2$, составляет 100% от максимального значения, соответствующего $W = 0$. В предельных случаях (при $k_0 \ll \alpha^{-1}$ и при $k_0 \gg \alpha^{-1}$) относительное

уменьшение скорости при $W = 2$ является незначительным.

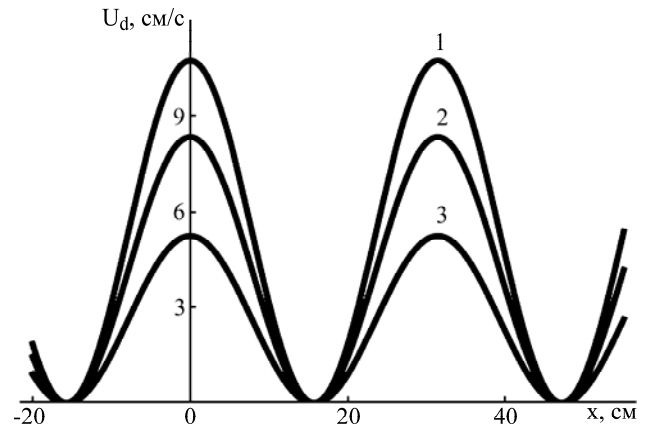


Рис. 4. Зависимость, аналогичная зависимости на рис. 3, построенная для скорости дрейфа, который вызван волновым пакетом со средним волновым числом $k_0 = 0,5\alpha^{-1} \approx 1,8 \text{ см}^{-1}$ и амплитудой образующих его волн $a = 0,08 \text{ см}$.

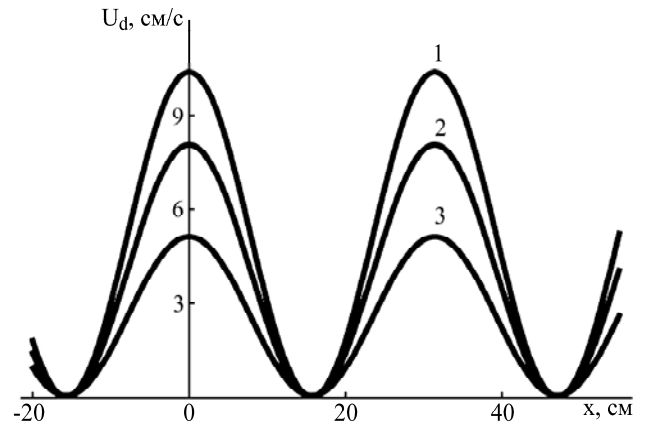


Рис. 5. Зависимость, аналогичная зависимости на рис. 3, построенная для скорости дрейфа, который волновым пакетом со средним волновым числом $k_0 = 2\alpha^{-1} \approx 7,4 \text{ см}^{-1}$ и амплитудой образующих его волн $a = 0,08 \text{ см}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях, когда величина поверхностной плотности электрического заряда недостаточна для развития неустойчивости горизонтальной заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку заряда, распространение волнового пакета по свободной поверхности инициирует поверхностный дрейф жидких частиц в направлении его распространения. Скорость этого дрейфа пропорциональна квадрату амплитуды волнового пакета и периодически изменяется вдоль его огибающей. В местах пересечения огибающей с равновесным горизонтальным уровнем скорость дрейфа уменьшается до нуля, а вблизи экстремумов огибающей достигает максимального значения. Дрейф на электрически нейтральной поверхности наиболее интенсивен, а при увеличении поверхностной плотности заряда его скорость уменьшается. Наиболее чувствительным к изменениям поверхностной плотности

электрического заряда является дрейф, связанный с распространением волнового пакета, для которого волновое число несущей волны равно величине, обратной к капиллярной постоянной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tonks L. A Theory of Liquid Surface Rupture by Uniform Electric Field. *Phys. Rev.* 1935, **48**, 562–568.
2. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
3. Коженков В.И., Фукс Н.А. Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор). *Успехи химии*. 1976, **45**(12), 2274–2284.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И. ЭГД неустойчивости в дисперсных системах (обзор). *Научное приборостроение*. 1991, **1**(3), 25–43.
5. Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О. ЭГД распыление жидкости (обзор). *Научное приборостроение*. 1991, **1**(4), 3–21.
6. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане*. Ч.1. М.: Мир, 1981. 480 с.
7. Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости*. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 288 с.
8. Островский Л.А., Потапов А.И. *Введение в теорию модулированных волн*. М.: Физматлит. 2003. 400 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 736 с.

Поступила 14.05.13

Summary

An analytical expression is constructed to estimate the influence of a surface electric charge on a drift velocity caused by propagation of the wave packet on a horizontal surface of inviscid fluid. It has been shown that the surface electric charge acts on the drift most effectively if the wavenumber of the carrier wave is equal to the value being inversed of capillary constant. Common regularities of the drift motion are established.

Keywords: Stokes drift, free surface, wave packet, mass transfer, electrically charged surface.