

# Обобщение таунсендовских вольт-амперных характеристик коронного разряда

Ф. П. Гросу<sup>а</sup>, Ан. М. Болога<sup>б</sup>, Х.-Р. Паур<sup>б</sup>, М. К. Болога<sup>а</sup>, О. В. Моторин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной физики АН Молдовы,

ул. Академическая, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова, e-mail: [mbologa@phys.asm.md](mailto:mbologa@phys.asm.md)

<sup>б</sup>Технологический Институт Карлсруэ, Институт Технической Химии

Герман фон Гельмгольц, Пл. 1, Эггенштайн – Леопольдсхафен, 76344, Германия, e-mail: [andrei.bologa@kit.edu](mailto:andrei.bologa@kit.edu)

Обсуждается вопрос о статистической обработке вольт-амперных характеристик коронного разряда в газах и об их обобщении на основе представлений теории подобия. Зависимость тока коронного разряда от приложенного напряжения предполагается двухпараметрической таунсендовского типа. Параметры вольт-амперных характеристик находятся методом наименьших квадратов на основе экспериментальных данных. Полученные расчетные вольт-амперные характеристики приводятся к безразмерному виду и обобщаются до уравнения отрезка биссектрисы первого координатного угла. Выявлены критерии и условия подобия коронных разрядов. На примере коронного разряда положительной полярности в гелии при различных давлениях выполнено обобщение ряда экспериментальных вольт-амперных характеристик с использованием предложенной методики.

*Ключевые слова:* коронный разряд, сила тока, напряжение, вольт-амперные характеристики, метод наименьших квадратов, методы подобия.

УДК 537.527.3

## ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Зависимости между физическими величинами удобно устанавливать на основе представлений теории размерностей и подобия [1]. Помимо операций с безразмерными величинами, называемыми комплексами или критериями подобия и являющимися инвариантными относительно системы единиц измерений, теория подобия в соответствии с  $\pi$ -теоремой позволяет сократить общее число величин, участвующих в рассматриваемом процессе. Условия подобия процессов одинаковой физической природы означают одни и те же значения соответствующих критериев подобия. Таким образом, упрощается моделирование натуральных процессов лабораторными и/или теоретическими результатами.

Методами теории подобия выводятся обобщенные критериальные зависимости для больших массивов экспериментальных данных, которые, как правило, графически представляют собой прямые или их отрезки в пределах одного графика. В области тепломассопереноса критериальными обобщающими уравнениями обычно завершаются законченные цельные разделы исследований [2]. Однако эти методы не нашли должного применения в областях, касающихся переноса электрического заряда в жидкостях и газах. В предлагаемой работе разработана методика обработки экспериментальных вольт-амперных характеристик (ВАХ) коронного разряда (КР) в газах с целью их критериального обобщения. Предварительно в обзорном плане вкратце

рассмотрим особенности наиболее типичных вольт-амперных характеристик коронного разряда, известных под названием «зависимостей типа Таунсенда».

## ОСОБЕННОСТИ ТАУНСЕНДОВСКИХ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для случая цилиндрической системы электродов (ЦСЭ) в виде проволоки, натянутой вдоль оси цилиндрического электрода, вольт-амперные характеристики с приемлемой для практических целей точностью теоретически были найдены Таунсендом и имели вид [3–5]:

$$I = \frac{8\pi\epsilon kU(U - U_c)}{R^2 \cdot \ln(R/r_0)}, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, для газов в условиях близких к нормальным, приблизительно равная электрической универсальной постоянной  $\epsilon_0$ ;  $k$  – коэффициент подвижности ионов знака коронирующего электрода;  $r_0$  и  $R$  – радиусы внутреннего (проволоки) и наружного цилиндрических электродов соответственно;  $U_c$  – начальное или критическое напряжение зажигания коронного разряда;  $U$  – действующее напряжение.

Методами конформных отображений Дейтш [3, 6, 7] показал, что структура зависимости силы тока от напряжения (1) справедлива вообще для двумерных полей или сводящихся к таковым [3, 6]:

$$I = A \cdot U \cdot (U - U_c), \quad (2)$$

где константа  $A$  в случае ЦСЭ равна:

$$A = \frac{8\pi\epsilon k}{R^2 \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (3)$$

Для других систем электродов можно лишь констатировать, что эта константа, судя по частному случаю (3), зависит от свойств газа ( $\epsilon$ ,  $k$ ) и геометрических факторов.

Формула (2) подтверждена многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Как следует из нее, ВАХ КР однозначно определяется двумя константами –  $A$  и  $U_c$ , которые являются параметрами зависимости (2):  $I(U)$ . Примечательно то, что сила тока прямо пропорциональна действующему напряжению  $U$ , что отражает закон Ома. Множитель же  $(U - U_c)$  в (2) отражает наличие свободных объемных зарядов плотностью  $\rho$  и прямую пропорциональность  $I \sim \rho \sim (U - U_c)$  – особенности, отмеченные различными авторами, в частности процитированными выше. Математической особенностью зависимости (2) является наличие нулевого корня (множителя  $U$ ), что и приводит к линейной зависимости редуцированной характеристики от напряжения, которая в свою очередь позволяет графическим путем найти параметры  $A$  и  $U_c$  (см. ниже).

В работе [8] приведены результаты исследований, которые касаются применимости уравнения Таунсенда (2) для электродной системы типа «игла-плоскость». Авторы исследований [9] отмечают, что применимость зависимости (2) для описания вольт-амперных характеристик коронного разряда в системе «игла-плоскость» зависит от ширины межэлектродного промежутка, с увеличением которой наблюдается сближение между экспериментальными данными и аналитической зависимостью. В работе [10] представлены результаты исследований коронного разряда отрицательной полярности в системе «игла-плоскость», где показано, что отношение тока коронного разряда к величине приложенного напряжения носит линейный характер, что подтверждает формулу (2). Рассмотрено также влияние межэлектродного расстояния и температуры на величину начального напряжения зажигания коронного разряда  $U_c$  и параметр  $A$ . Аналогично другим исследованиям в работе [11] предпринята попытка описания зависимости тока коронного разряда от приложенного напряжения в аналитической форме, где используется степенная зависимость с коэффициентом от 1,5 до 2,0.

В работе [12] на основе принципов подобия и размерностей показано, что структура формулы (2) практически сохраняется для любой двухэлектродной коронирующей системы. Вместе с

тем ряд исследований в области коронного разряда [13, 14], в частности в условиях высоких температур и давлений [15–18], показал, что существуют условия, когда КР может не подчиняться закономерности (2). В этой связи весьма примечательны случаи наличия гистерезиса [13–16] в вольт-амперных характеристиках.

В предлагаемой статье эти специальные случаи не затрагиваются, а рассматриваются лишь вопросы обработки экспериментальных данных с точки зрения установления обобщенных ВАХ КР.

#### РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ВЫВОД ИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для практического использования формулы (2) предполагаются известными параметры  $A$  и  $U_c$ . Первый из них в случае ЦСЭ теоретически можно вычислить по формуле (3), второй – исходя из известной формулы Пика. Возникает необходимость нахождения указанных параметров в общем случае. Наиболее надежные и распространенные способы решения этой задачи основаны на использовании опытных данных. Первый из них – графический. Второй – расчетный, основанный на методе наименьших квадратов (МНК).

Казалось бы, параметр  $U_c$  совсем просто зафиксировать экспериментальным путем непосредственно по моменту возникновения КР, однако это весьма сложно осуществить практически из-за крайне неустойчивого характера явлений возникновения коронного разряда [3, 4, 6, 7]. При графическом способе эти трудности преодолеваются следующим образом (см., например, [3]). Зависимость (2) преобразуют в редуцированную характеристику:

$$I/U = A \cdot (U - U_c). \quad (4)$$

Построив график этой дроби как функцию от напряжения  $U$  на основе экспериментальных данных, по точке пересечения прямой (4) с осью абсцисс  $U$  находят начальное напряжение  $U_c$ , а по тангенсу угла наклона редуцированной зависимости – параметр  $A$ . В этом состоит суть графического метода. Однако методы, основанные на графических построениях, отличаются известной неточностью, поэтому гораздо надежнее обрабатывать экспериментальные данные с помощью МНК. По этому методу, обозначив

$$I/U \equiv Y; \quad A \cdot U_c \equiv B,$$

уравнению (4) придаем вид линейной функции от независимой переменной  $U$ :

$$Y = A \cdot U - B.$$

Составим основное уравнение МНК, потребовав минимума функции:

$$\overline{[Y - (A \cdot U - B)]^2} = \min(A, B), \quad (5)$$

где черта сверху означает среднее арифметическое значение.

Приравняв нулю производные по  $A$  и  $B$  от выражения (5), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot \overline{U^2} - B \cdot \overline{U} = \overline{UY}, \\ A \cdot \overline{U} - B = \overline{Y}, \end{cases}$$

решая которую, приходим к формулам для искомых параметров:

$$A = \frac{\overline{U \cdot Y} - \overline{U} \cdot \overline{Y}}{\overline{U^2} - \overline{U}^2}; \quad B = \frac{(\overline{U \cdot Y}) \cdot \overline{U} - \overline{Y} \cdot \overline{U^2}}{\overline{U^2} - \overline{U}^2} \Rightarrow$$

$$U_c \equiv \frac{B}{A} = \frac{(\overline{U \cdot Y}) \cdot \overline{U} - \overline{Y} \cdot \overline{U^2}}{\overline{U \cdot Y} - \overline{U} \cdot \overline{Y}}.$$

Учитывая  $\overline{U \cdot Y} \equiv \overline{I}$ , придаем выражениям для  $A$  и  $U_c$  следующий вид:

$$A = \frac{\overline{I} - \overline{U} \cdot \overline{Y}}{\overline{U^2} - \overline{U}^2}; \quad U_c = \frac{\overline{I} \cdot \overline{U} - \overline{Y} \cdot \overline{U^2}}{\overline{I} - \overline{U} \cdot \overline{Y}}. \quad (6)$$

Выражения (6) можно рассматривать как стандартные при определении параметров распределения  $I(U)$  при коронном разряде в случае структуры ВАХ таунсендовского типа (2). Зная параметры  $A$  и  $U_c$ , можно по основной формуле (2) рассчитать сами ВАХ и построить их график.

Этот подход может быть предложен для расчета вольт-амперных характеристик и их уравнений для различных газов в условиях варьирования их температуры и давления. В качестве примера на рис. 1 представлены результаты обработки данных по КР положительной полярности в гелии при комнатной температуре и различных давлениях. На этом рисунке точки – экспериментальные результаты, а кривые, проведенные через них, – расчетные по формуле (2) с учетом значений  $A$  и  $U_c$ , вычисленных согласно (6) (см. ниже). Условия проведения экспериментов более подробно описаны в [16].

Результаты расчетов параметров  $A$  и  $U_c$  и соответствующих уравнений ВАХ приведены в таблице. Как видно из рис. 1, формула (2) при расчете параметров  $A$  и  $U_c$  по формулам (6) весьма адекватно описывает экспериментальные результаты.

#### ОБОБЩЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

На рис. 1 представлены четыре отдельные ВАХ для четырех давлений. Обобщить эти зави-

симости означает свести их в единую, которая геометрически описывалась бы единым графиком. При этом соответствующее уравнение должно быть безразмерным, обеспечивая тем самым, с одной стороны, его инвариантность относительно системы единиц измерений, с другой, что не менее важно, – подобие физических процессов при коронном разряде. Соответствующие преобразования в целях наглядности осуществим поэтапно.

На первом этапе построим редуцированные характеристики согласно формуле (4), рис. 2. Они, как отмечалось, позволяют графически определить параметры распределения ВАХ и в целях проверок сопоставить их с расчетными (таблица). Кроме того, геометрический переход от квадратичных зависимостей (рис. 1) к прямым (рис. 2) позволяет нагляднее судить о правомерности ВАХ по тому, насколько близко к этим прямым ложатся экспериментальные точки. Согласно рис. 2 параболические аппроксимации (2) весьма адекватны экспериментальным зависимостям. Более полное обобщение экспериментальных зависимостей является предметом дальнейших исследований.

На втором этапе преобразуем уравнение (4) путем деления обеих частей на величину  $U_c$ . В новых координатах  $(U_*, Y_1)$  получим семейство отрезков прямых:

$$Y_1 \equiv I / (U_* \cdot U_c^2) = A \cdot (U_* - 1),$$

исходящих из точки (1; 0) (рис. 3). Углы их наклона к оси абсцисс определяются параметром  $A$ , поделив на который, в системе координат  $(U_*, Y_2)$  получим

$$Y_2 \equiv I / (A \cdot U_* \cdot U_c^2) = U_* - 1, \quad (7)$$

где введено обозначение для безразмерного напряжения:

$$U_* \equiv U / U_c \geq 1, \quad (8)$$

откуда видно, что  $U_c$  играет роль масштабной единицы ( $U_0$ ) для напряжения. Кстати, уравнению (7) можно придать вид по прототипу основного уравнения (2), причем в безразмерном виде:

$$I_* = U_* \cdot (U_* - 1), \quad (9)$$

где введено обозначение для безразмерной силы электрического тока

$$I_* \equiv I / I_0, \quad (10)$$

а масштабной единицей для тока служит величина

$$I_0 \equiv A \cdot U_c^2. \quad (11)$$

В частности, для ЦСЭ с учетом (3) получим

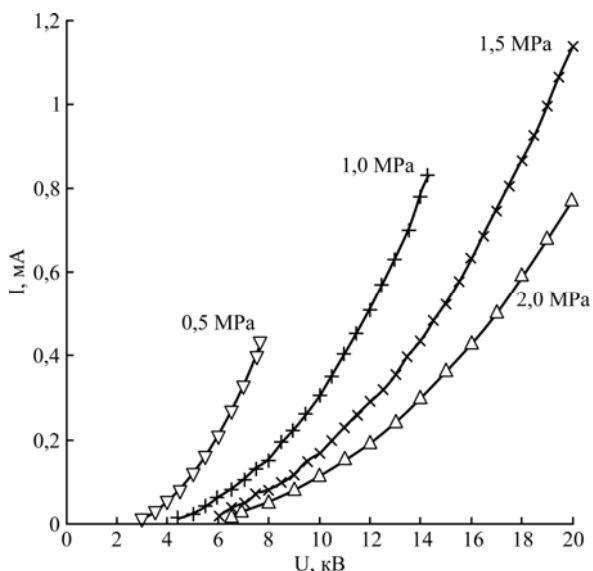


Рис. 1. Исходные кривые.

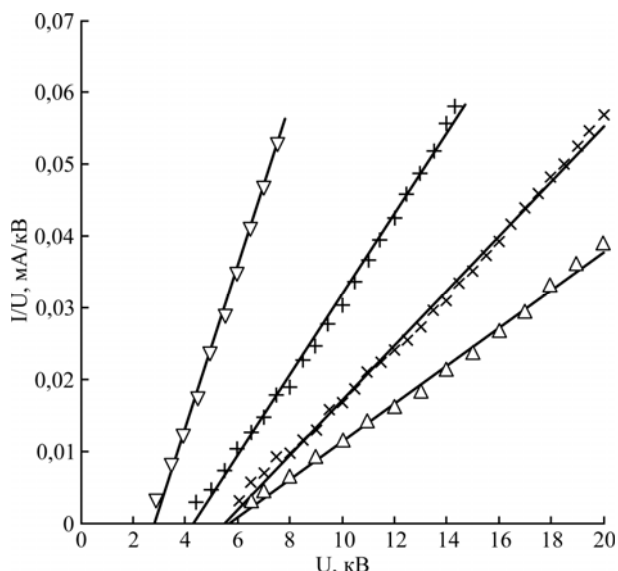


Рис. 2. Редуцированные прямые.

Расчет вольт-амперных характеристик

№ кривой	$P$ , МПа	$A$ , мА/кВ <sup>2</sup>	$U_c$ , кВ	$I(U)$ , мА
1	0,5	0,0113	2,8178	$0,0113 \cdot U \cdot (U - 2,8178)$
2	1,0	0,0056	4,3002	$0,0056 \cdot U \cdot (U - 4,3002)$
3	1,5	0,0038	5,4521	$0,0038 \cdot U \cdot (U - 5,4521)$
4	2,0	0,0026	5,6356	$0,0026 \cdot U \cdot (U - 5,6356)$

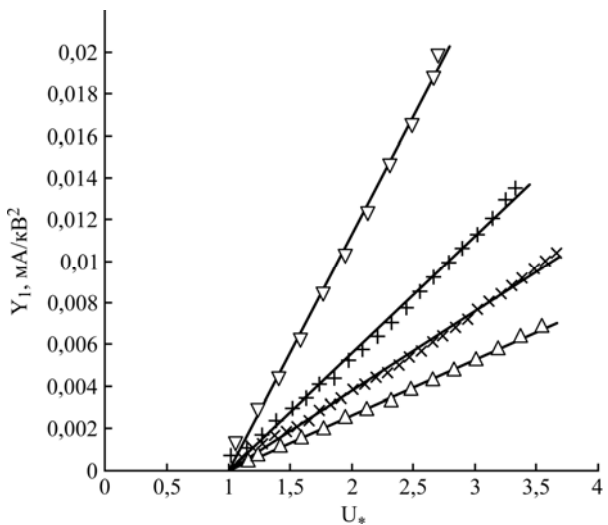


Рис. 3. Пучок полупрямых с началом в точке (1; 0).

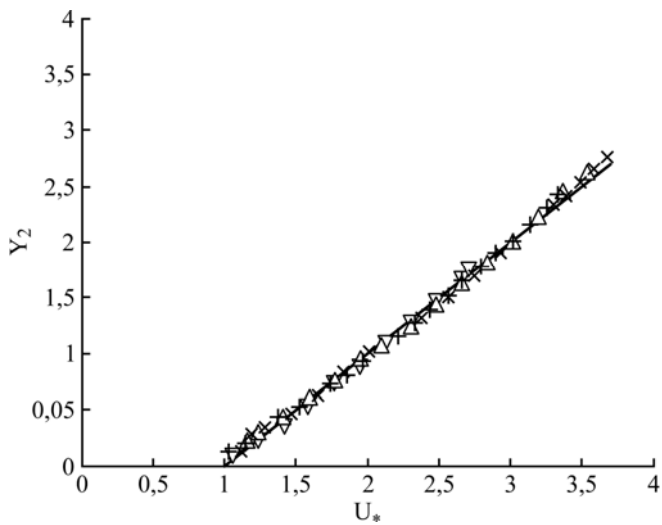


Рис. 4. Обобщающая редуцированная полупрямая под углом  $\pi/4$  к оси абсцисс с началом в точке (1; 0).

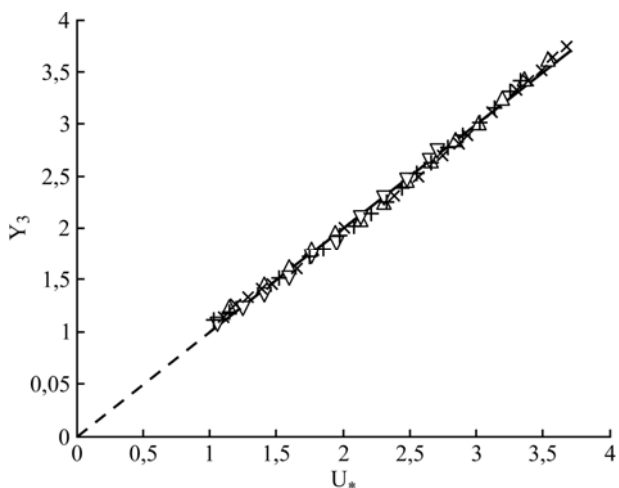


Рис. 5. Бисектриса с началом в точке (1; 1).

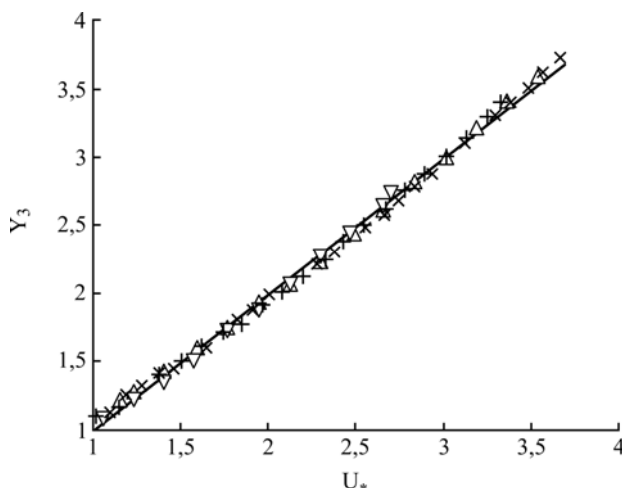


Рис. 6. Окончательная обобщающая бисектриса.

$$I_0 = \frac{8\pi \cdot \varepsilon \cdot k \cdot U_c^2}{R^2 \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (12)$$

Вернемся, однако, к уравнению (7), которое является уравнением отрезка прямой, исходящего из точки (1; 0) под углом  $45^\circ$  к оси абсцисс (рис. 4), и обобщает предыдущие графики, представленные на рис. 3. Параллельным сдвигом графика вверх на единицу получим график с началом в точке (1; 1) (рис. 5), что равносильно переносу в (7) единицы в левую часть равенства:

$$Y_3 \equiv Y_2 + 1 = U_*. \quad (13)$$

Формула (13) является обобщающей зависимостью, изображенной на рис. 5, где начало луча совмещено с началом координат О (1; 1) (рис. 6). Удобство выражения (13) состоит в том, что, определяя  $Y_3$  с учетом выражения для  $Y_2$ , согласно (7), по уравнению (13) получаем безразмерное напряжение  $U_*$ . В силу симметрии графика (рис. 6) легко оценивается степень близости экспериментальных ВАХ к расчетной зависимости (13). Кроме того, у всех коронных разрядов для одинаковых безразмерных напряжений согласно (9) и (13), одинаковыми будут и безразмерные величины токов. Следовательно, коронные разрядные процессы подобны, поэтому зависимости (9) и (13) являются обобщающими. Данные о параметрах одного коронного разряда могут быть распространены на другие КР при условии геометрического подобия электродных систем и подобия физического, означающего одно и то же значение определяющего критерия подобия  $U_* = \text{idem}$  для данных процессов.

### ВЫВОДЫ

1. Методом наименьших квадратов определены параметры вольт-амперных характеристик коронного разряда таунсендовского типа.

2. В качестве примера проведены обработка и обобщение ряда экспериментальных вольт-амперных характеристик коронного разряда положительной полярности в гелии при различных давлениях. Показано четкое согласование экспериментальных данных с рассчитанными по аналитическим зависимостям.

3. Выдвинуто предположение о применимости приведенной методики обработки и обобщения опытных данных по коронному разряду для различных газов и физических условий, которое находится в стадии исследований. Его результаты явятся предметом дальнейших публикаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке по билаateralному проекту АŞМ-ВМБФ 13.823.15.09/GA.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1977. 440 с.
2. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. *Теплопередача*. М.: Энергия, 1975. 380 с.
3. Капцов Н.А. *Коронный разряд*. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1947. 226 с.
4. Леб Л. *Основные процессы электрических разрядов в газах*. Москва-Ленинград: ГосИздат технико-теоретической литературы, 1950. 672 с.
5. White H.J. *Industrial Electrostatic Precipitation*. Reading, MA: Addison Wesley, 1963, 376 p.
6. Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзабекян Г.З., Пашин М. *Основы электродинамики дисперсных систем*. М.: Энергия, 1974. 420 с.
7. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда*. М.: Наука, 1992. 536 с.
8. Henson B.L. A Space-Charge Region Model for Microscopic Stead Coronas from Points. *J Appl Phys.* 1981, **52**, 709–725.
9. Ferreira G.F.L., Oliveria O.N., Giacometti Jr., Giacometti J.A. Point-to-plane Corona: Current-Voltage Characteristics for Positive and Negative Polarity with Evidence of an Electronic Component. *J Appl Phys.* 1986, **59**(9), 3045–3049.
10. Yamada K. An Empirical Formula for Negative Corona Discharge Current in Point-Grid Electrode Geometry. *J Appl Phys.* 2004, **96**(5), 2472–2475.
11. Meng X.B., Zhang H., Zhu J. A General Empirical Formula of Current-Voltage Characteristics for Point-to-Plane Geometry Corona Discharges. *J Phys D: Appl Phys.* 2008, **41**, 065209 (10 pp).
12. Grosu F.P., Bologa An.M., Bologa M.K. and Motorin O.V. On the Simulation of a Corona Discharge by the Similarity Theory Methods. *Surf Eng Appl Electrochem.* 2014, **50**(2), 141–148.
13. Шуайбов А.К. Об условиях контрагирования многоэлектродного коронного разряда на смесях He/Ar, Kr, Xe. *Письма в ЖТФ*. 1999, **25**(17), 90–94.
14. Дандарон Г.-Н.Б., Балданов Б.Б. Особенности зажигания отрицательной короны в потоке электроположительного газа. *Инженерная физика*. 2007, (3), 30–32.
15. Bologa A., Paur H.-R., Seifert H., Hering W., Woletz K. Particle Charging in High Temperature/High Pressure Gases. Part I. Influence of Gas Composition on Corona Discharge Characteristics. *Abstracts of the International Aerosol Conference*. August 30–September 03, 2010, Helsinki, Finland, Abstract No. 763, <http://www.eac2012.com/EAC2012Book/files/694.pdf>.
16. Bologa An., Paur H.-R., Seifert H., Woletz K. Influence of Gas Composition, Temperature and Pressure on Corona Discharge Characteristics. *Int J Plasma Environmental Science & Technology*. 2011, **5**(2), 110–116.
17. Bologa An., Paur H.-R. Corona Discharge in Gaseous Phase – Study and Applications. *Abstracts of the 6<sup>th</sup>*

*International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics*. 11–14 September 2012, Chisinau, Moldova, p. 258.

18. Самусенко А.В., Стишков Ю.К. Электрофизические процессы в газах при воздействии сильных электрических полей. Санкт-Петербург: ВВМ, 2011. 567 с.

*Поступила 14.02.14*

### **Summary**

Statistical treatment of current-voltage characteristics of the corona discharge in gases and their generalization on the basis of the theory of similarity is considered. Dependence of the corona discharge current on the app-

lied voltage is assumed to be two-parametric of the Townsend type. Parameters of current-voltage characteristics are found by the least square method on the basis of experimental data. The calculated current-voltage characteristics are reduced to the dimensionless form and are generalized to the form of the equation of the first quadrant bisector. The criteria and conditions of similarity of corona discharges are obtained. As an example, generalization of current-voltage characteristics of a positive corona discharge in helium at different pressures using the proposed method is presented.

*Keywords: corona discharge, current, voltage, current-voltage characteristics, least square method, similarity methods.*