

Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.А. Курочкина, С.А. Санасарян

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. Теория волн на заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес для многочисленных технических естественнонаучных приложений, связанных с феноменом электродиспергирования жидкости, таких как исследование закономерностей появления огней Св. Эльма [1], конструирование жидкометаллических источников ионов [2], коллоидных реактивных двигателей и различных установок по распылению жидких топлив, лаков, красок и т.п. (см. [3] и цитируемую там литературу).

В последние годы появились работы [4, 5], в которых в квадратичном по амплитуде волны приближении впервые найдено корректное выражение для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны на поверхности глубокой жидкости конечной вязкости. В настоящей работе по аналогии с [4, 5] предлагается строгое асимптотическое решение задачи определения профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной бегущей волны, распространяющейся по заряженной поверхности глубокой жидкости произвольной вязкости.

2. Пусть несжимаемая идеально проводящая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вертикально вверх в поле сил тяжести $\vec{g} \parallel -\vec{e}_z$, заполняет полупространство $z \leq 0$ и граничит с вакуумом. На поверхности жидкости распределен электрический заряд такой, что в равновесном состоянии электрическое поле над ней имеет напряженность $E_0 \vec{e}_z$. Будем исследовать временную эволюцию начальной периодической деформации свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = (x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения в жидкости, которые для простоты считаются независимыми от координаты Y , а \vec{e}_x и \vec{e}_z – орты осей Ox и Oz . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной в поле сил тяжести формы $z = 0$, поле скоростей $\vec{U} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_z$ и электрический потенциал Φ над жидкостью удовлетворяют соотношениям:

$$z > \xi : \quad \Delta \Phi = 0 ; \quad (1)$$

$$z < \xi : \quad \partial_t \vec{U} + \text{rot}(\vec{U}) \cdot \vec{U} = -\text{grad} \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{U^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \vec{U}; \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{U} = 0; \quad (3)$$

$$z = \xi : \quad \partial_t \xi + u \partial_x \xi = v; \quad (4)$$

$$p - 2\rho \nu \vec{n} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U}) + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 = \gamma \text{div}(\vec{n}); \quad (5)$$

$$\vec{\tau} \cdot ((\vec{n}\nabla)\vec{U}) + \vec{n} \cdot ((\vec{\tau}\nabla)\vec{U}) = 0; \quad (6)$$

$$\Phi = 0; \quad (7)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad -\nabla\Phi \rightarrow E_0\vec{e}_z; \quad (8)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \vec{U} \rightarrow 0; \quad (9)$$

здесь t – время; p – давление внутри жидкости; ∂_t и ∂_x – частные производные по времени и координате; $\vec{\tau}$ и \vec{n} – орты касательной и нормали к поверхности.

Для замыкания математической формулировки задачи выписанные соотношения должны быть дополнены начальными условиями, задающими начальное отклонение поверхности и начальное распределение поля скоростей. Как и в [4], вид начальных условий будем определять в процессе решения таким образом, чтобы перейти к наиболее простым в смысле аналитического описания формам колебаний свободной поверхности и выявить свойства волны, связанные с ее нелинейностью.

3. Пусть начальное возмущение $\xi(x,t)$ периодически по x и образует волнообразный рельеф с длиной волны λ (k – волновое число) и амплитудой a . В качестве малого параметра примем $\varepsilon = ka$ ($k = 2\pi/\lambda$ – волновое число).

В квадратичном по ε приближении решение задачи (1) – (9) ищется в виде разложений:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + O(\varepsilon^3); & \vec{U}_1 &\sim O(\varepsilon); & \vec{U}_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ p &= p_0 + p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3); & p_0 &\sim O(1); & p_1 &\sim O(\varepsilon); & p_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3); & \Phi_0 &\sim O(1); & \Phi_1 &\sim O(\varepsilon); & \Phi_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); & \xi_1 &\sim O(\varepsilon); & \xi_2 &\sim O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Постановка (10) в (1) – (3) приводит к задачам нулевого, первого и второго порядков малости.

4. После разделения исходной задачи на порядки малости и решения задач первого и второго порядка было найдено решение для профиля нелинейной периодической гравитационно-капиллярной волны, распространяющейся в выбранной системе координат вдоль Ox (вправо) волны в квадратичном по амплитуде приближении, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos(\theta) \cdot \exp(S_1 t) + a^2 (\zeta_1 \cos(2\theta) - \zeta_2 \cos(2\theta)) \cdot \exp(2S_1 t), \\ S_1 &= \operatorname{Re} S; \quad S_2 = \operatorname{Im} S; \quad \theta = S_2 t - kx; \quad T = S_1 t, \end{aligned} \quad (11)$$

где S – корень дисперсионного уравнения

$$(S + 2vk^2)^2 + \omega_0^2 = 4v^2 k^3 \sqrt{k^2 + \frac{S}{v}},$$

такой, что $\operatorname{Re}((S + 2vk^2)^2 + \omega_0^2) > 0$ (это обеспечивает затухание волнового движения при увеличении глубины). Выписанное дисперсионное уравнение отличается от известного (см., например [6]) только тем, что параметр

$$\omega_0^2 = kg(1 + a^2 k^2 - 2akW); \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},$$

имеющий смысл частоты волнового движения на поверхности идеальной жидкости, зависит от безразмерного параметра Тонкса–Френкеля [7]:

$$W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}},$$

характеризующего устойчивость жидкости по отношению к поверхностному заряду. Известно, что волны с волновыми числами, удовлетворяющими условию

$$(ak)^1 + ak < W,$$

являются устойчивыми [7]. Если волновое число этому условию не удовлетворяет, то амплитуда волны начинает расти экспоненциально во времени.

Аналитические выражения для S_1 , S_2 , ζ_1 и ζ_2 весьма сложны, однако в приближении малой вязкости асимптотические приближения для них имеют довольно простой вид:

$$S_1 = -2vk^2 + o(v); \quad S_2 = \omega_0 + o(v); \quad (12)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{4}k \frac{(1 + a^2k^2 - 2akW)}{0,5 - a^2k^2} + o(v); \quad \zeta_2 = \frac{k^2\omega_0}{g} \frac{(2 - a^2k^2 - 2akW)}{(0,5 - a^2k^2)^2} v + o(v). \quad (13)$$

Обращение в ноль знаменателя выражений (13) при $a^2k^2 = 0,5$ свидетельствует о том, что при волновом числе $k = k_* = 1/a\sqrt{2}$ нелинейное взаимодействие волн, участвующих в формировании профиля (11), имеет резонансный характер. Этот резонанс в случае отсутствия заряда неоднократно исследовался в литературе [8]. Цель настоящей работы – исследование нерезонансного решения задачи, для которого значение k лежит вне малой окрестности k_* .

Исследование условий знакопостоянства приведенных выражений для амплитудных коэффициентов поправки второго порядка малости позволяет выявить наиболее существенные закономерности влияния поверхностного заряда и вязкости на профиль нелинейной волны.

Из выражения для ζ_1 следует, что поверхностная плотность заряда (ее квадрат пропорционален W) отвечает за знак ζ_1 :

$$\zeta_1 > 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} k^2 < 0,5; \\ W < 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} k^2 > 0,5; \\ W > 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases}$$

$$\zeta_1 < 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} k^2 < 0,5; \\ W > 0,5(ak + (ak)^{-1}); \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} k^2 > 0,5; \\ W < 0,5(ak + (ak)^{-1}). \end{cases}$$

Слагаемое $\sim a^2\zeta_1\cos 2\theta$ имеет ту же фазу, что и первое слагаемое $\sim a\cos\theta$ в (1), поэтому их сумма при $\zeta_1 > 0$ представляет собой волну с вершиной более острой, чем у синусоиды. При $\zeta_1 < 0$ волна получается с менее острой, чем у синусоиды вершиной.

Влияние вязкости на профиль волны двояко. С одной стороны, вязкость является причиной уменьшения амплитуды волны со временем, вызывая диссипацию энергии. Экспоненциальный по времени множитель при амплитудах в (11) характеризуется декрементом затухания, пропорциональным вязкости (см.(11)). Этот момент связан с зависимостью дисперсионного уравнения задачи от вязкости. С другой стороны, от вязкости оказываются зависимыми амплитудные коэффициенты ζ_1 и ζ_2 в задаче второго порядка малости. Из приведенных асимптотических выражений видно, что наиболее сильно от вязкости зависит $\zeta_2 \sim v$, при этом условия знакопостоянства этого параметра имеют вид

$$\zeta_2 > 0, \quad \text{если} \quad W < (ak)^{-1} - ak/2; \quad \zeta_2 < 0, \quad \text{если} \quad W > (ak)^{-1} - ak/2.$$

Если выражение (11) переписать в эквивалентной форме, то можно увидеть, что первое слагаемое, заключенное в скобки, представляет собой профиль, симметричный относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Второе слагаемое – добавка, сдвинутая на $\pm \pi/2$ (в зависимости от знака ζ_2) относительно первого. Результирующий профиль будет асимметричен относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Степень асимметричности связана с величиной $\zeta_1 \sim v$ и таким образом определяется вязкостью v .

Сформулированные результаты интересно проиллюстрировать для нелинейной капиллярно-гравитационной периодической волны с волновым числом $k = 1/a$. Этому значению k уделяется много внимания в различных исследованиях по теории волн. Во-первых, именно при таком k совпадает групповая и фазовая скорости периодической гравитационно-капиллярной волны в линейном по амплитуде приближении. Во-вторых, волна с таким волновым числом является наиболее неустойчивой при реализации различных неустойчивостей свободной поверхности жидкости [1, 9].

На рис.1, 2 в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, приведены результаты расчета профилей волн при безразмерном значении волнового числа $k = 1$ и различных значениях поверхностной плотности заряда и вязкости.

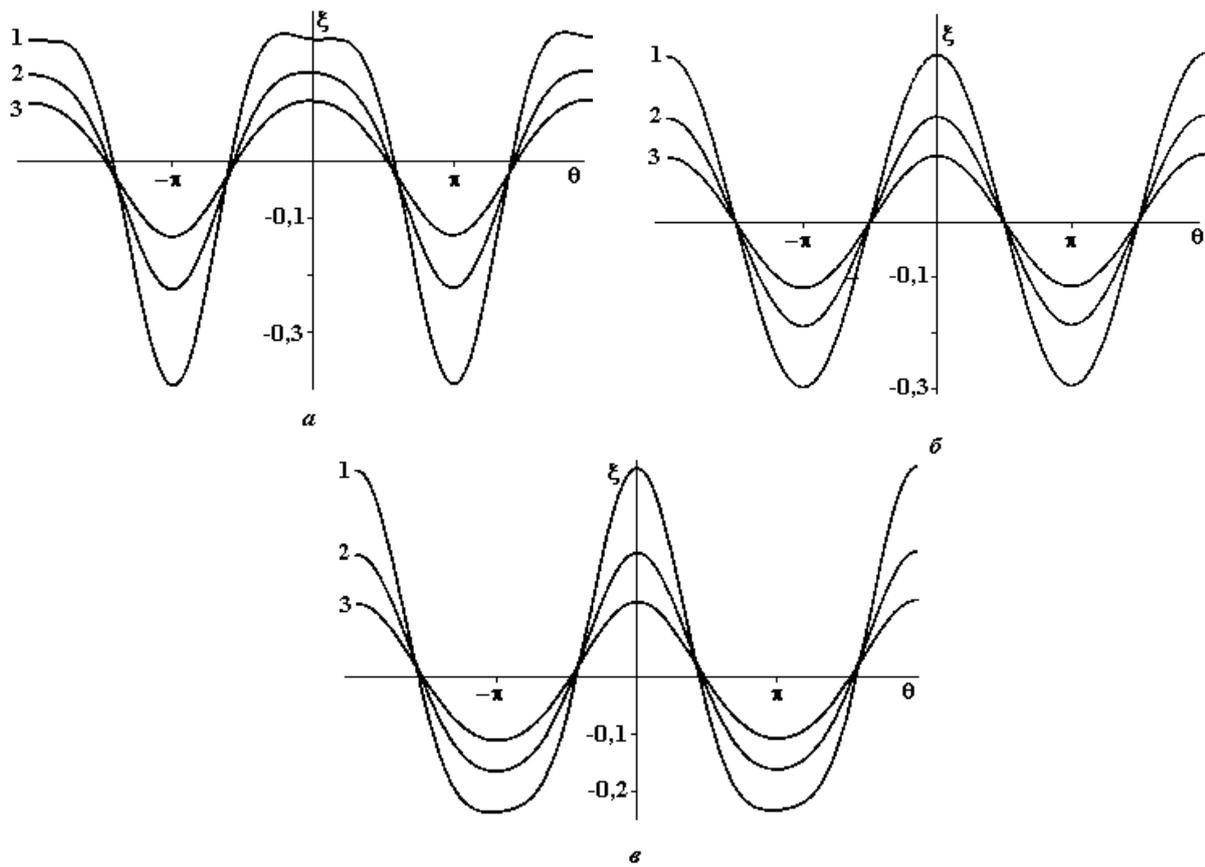


Рис. 1. Эволюция профилей нелинейных волн, рассчитанная с помощью (11) в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, при $k = 1$, $\nu = 0,01$, $a = 0,3$ в моменты безразмерного времени $t = 0$ (1); 25 (2); 50 (3) при различных значениях плотностной плотности заряда W : а - 0; б - 1; в - 1,7

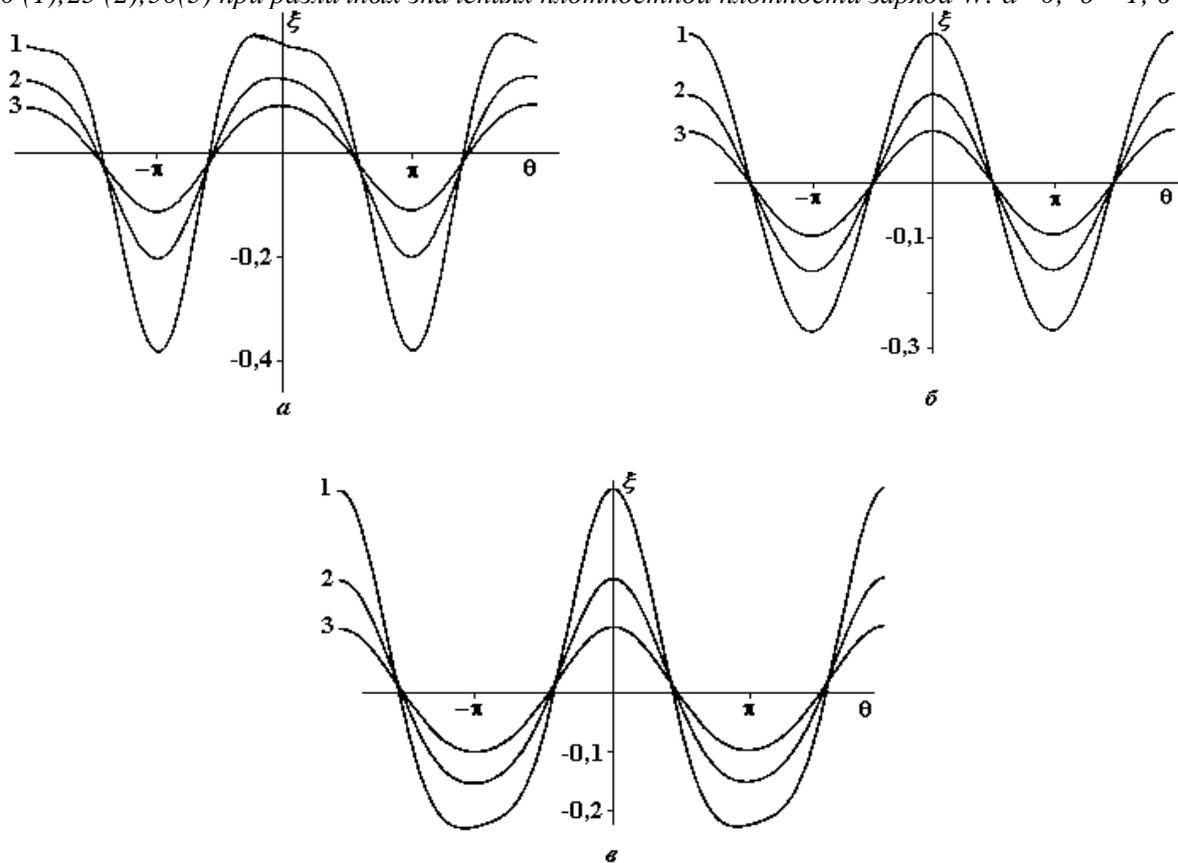


Рис.2. Варианты эволюции профилей нелинейных волн, аналогичные рассмотренным на рис.1, но рассчитанные при другом безразмерном значении вязкости $\nu = 0,03$.
 W : а - 0; б - 1; в - 1,7

На рис.1,*a–б* построена эволюция профиля периодической капиллярно-гравитационной волны при различных значениях поверхностного заряда. Видно, что волна с пригупленной по сравнению с идеальной косинусоидой вершиной превращается в чистую косинусоиду при увеличении W до значения 1. Дальнейшее увеличение W приводит к заострению вершины.

Рис.2, *a–в* иллюстрирует влияние вязкости на асимметрию профиля волны с волновым числом $k = 1$. Чтобы влияние вязкости проявилось отчетливее, рис.2, *a – в* построен при больших, по сравнению с рис.1 значениях безразмерной вязкости. Из рисунков видно, что волна (распространяющаяся вправо) в отсутствие поверхностного заряда имеет профиль, скошенный в сторону противоположную направлению распространения волны (рис.2,*a*). Увеличение W до значения $W = 1$ превращает волну в чистую косинусоиду (рис.2,*б*), а дальнейшее увеличение W связано со слабым укручением переднего фронта волны по сравнению с задним.

5. Таким образом, поверхностный заряд и вязкость существенно влияют на профиль периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны. Волна, волновое число которой обратно по величине капиллярной постоянной жидкости, заметно заостряется в вершине при увеличении поверхностного заряда. Наличие вязкости жидкости наиболее отчетливо заметно при малых значениях поверхностного заряда и проявляется в появлении асимметрии профиля капиллярно-гравитационной периодической бегущей волны относительно вертикали, проходящей через ее вершину.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-929 и гранта РФФИ № 03-01-00760.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И., Голованов А.И., Григорьева И.Д. О критических условиях возникновения огней Св. Эльма // Электронная обработка материалов. 2001. № 1. С. 21–29.
2. Габович М.Д. Жидко-металлические источники ионов (обзор) // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137 – 151.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженных поверхностей капель (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
4. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Асимптотическое решение задачи о волнах в вязкой глубокой жидкости // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
5. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
6. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.
7. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
8. Nayfeh A.H. Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves // J. Fluid Mech. 1971. V.48. P. 385–395.
9. Ширяева С.О., Кузьмичев Ю.Б., Голованов А.С., Белоножко Д.Ф. Особенности реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при конечной толщине верхней среды // Электронная обработка материалов. 2000. № 2. С. 25–33.

Поступила 25.03.03

Summary

The analytical expression for the profile of nonlinear periodical capillary-gravity wave on a charged liquid surface has been obtained in the second order on wave amplitude when viscosity of the liquid is small. It's has been shown that an electric charge influences on curvature of the wave crest and the viscosity of a liquid causes an asymmetric of the wave profile relative to vertical line crossing the wave crest.