А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

О НЕЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ЧАСТОТЫ КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
г. Ярославль, ул. Советская, 14, 150000, Россия

При решении задачи о нелинейных осесимметричных капиллярных колебаниях заряженной капли в третьем порядке малости при произвольной одномодовой начальной деформации ее равновесной формы найдена поправка к частоте осцилляций изначально возбужденной моды, имеющая второй порядок малости, увеличивающаяся с ростом номера моды и величины собственного заряда капли.

Задача об исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. В связи с этим она неоднократно решалась в постановках различной сложности и строгости (см., например, [1 – 7] и указанную там литературу). Тем не менее, ни в одном из проведенных исследований не были получены корректные нелинейные поправки к частоте осцилляций. Следует отметить, что в [1, 2] такие поправки для трех первых мод капиллярных осцилляций капли рассчитывались, но приведенные в этих статьях выражения для поправок ошибочны. В работе [2] была предпринята попытка устранить ошибку [1], но аналитические выражения [2] для поправок содержат описки, сводящие на нет эффективность исправлений.

Пусть несущая заряд Q капля радиуса R идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ совершает осесимметричные осцилляции в окрестности равновесной сферической формы. Начальную деформацию равновесной сферической формы зададим в виде виртуального возбуждения m-й моды линейных капиллярных осцилляций: $\varepsilon \cdot P_m(\cos\vartheta)$, осуществляющихся с частотой ω_m, где $P_m\left(\cos\vartheta\right)$ есть полином Лежандра порядка m. Будем искать выражение для образующей формы колеблющейся капли в любой момент времени, имея целью получить поправки к форме третьего порядка малости по ε и нелинейные поправки к частоте осцилляций. Решение проведем в сферической системе координат, связанной с центром масс капли.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи и ее решение методом многих масштабов полностью эквивалентны использовавшимся ранее [3 – 7], и здесь не станем их обсуждать в виду ограниченности объема статьи. Приведем сразу конечный результат: образующую нелинейно-осциллирующей капли, выписанную с точностью до третьего порядка малости по ε–амплитуде начальной деформации:

$$r\left(\vartheta,t\right)=1+\varepsilon\cdot\cos[(\omega_n+\varepsilon^2\cdot b_m)t]\cdot P_m(\cos\vartheta)+\varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(2)}(t)P_n(\cos\vartheta)+\varepsilon^3\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(3)}(t)P_n(\cos\vartheta). \quad (1)$$

$$\omega_m^2=\frac{\sigma}{\rho\cdot R^3}\left(n-1\right)n\left[\left(n+2\right)-W\right];\;\; W=\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}. \quad (2)$$

b_m и $M_n^{(j)}$ – весьма громоздкие коэффициенты, которые не будем приводить в виду ограниченности места, отметим лишь, что их можно найти в [8]. В настоящем же изложении ограничимся анализом последствий для устойчивости капли, связанных с появлением нелинейной поправки к частоте капиллярных осцилляций, и графическим анализом зависимостей b_m от величины собственного заряда капли (от величины параметра W).

Из (1) видно, что частота колебаний поверхности капли изменяется на величину второго порядка малости $\varepsilon^2 \cdot b_m$ по сравнению с частотой линейных капиллярных колебаний ω_m. В используемом третьем приближении по ε поправки к частотам $\varepsilon^2 \cdot b_m$ появляются лишь в слагаемых первого порядка малости.

Добавка к частоте ω_m, характеризуемая коэффициентом b_m, отрицательна и увеличивается по абсолютной величине с ростом номера m изначально возбужденной моды и собственного электрического заряда капли Q, характеризуемого параметром W (см. рис. 1). Разрыв на кривых для четвертой и девятой мод (см. рис.1, *б*) связан с внутренними нелинейными резонансами, реализующимися уже во втором порядке малости [9].

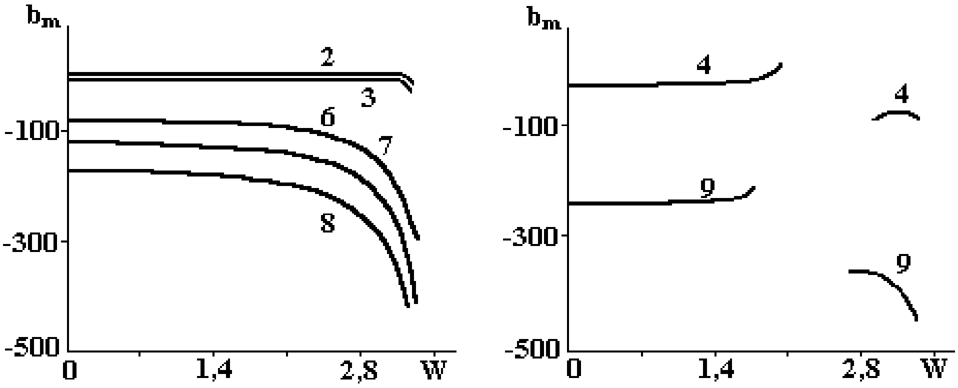

Рис.1. Зависимость коэффициента b_m, обезразмеренного на $\sqrt{\sigma/\rho R^3}$, от параметра W, характеризующего заряд капли. Номера у кривых совпадают с номерами возбужденных мод

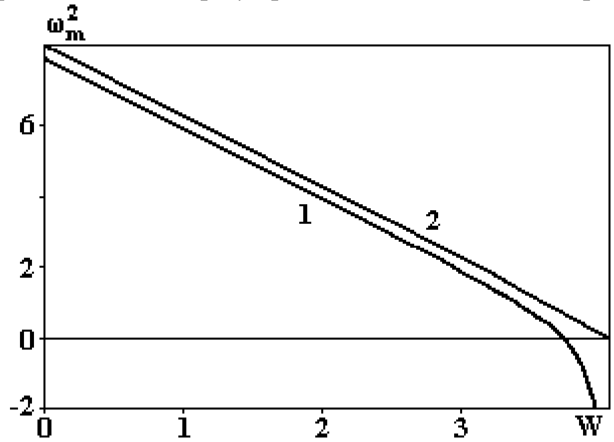

Рис.2. Зависимости от параметра W квадрата частоты основной моды, обезразмеренной на $\sigma/\rho R^3$ – с учетом нелинейной поправки (1); без учета нелинейной поправки (2)

Нелинейное взаимодействие мод в задаче третьего порядка малости приводит к существенному расширению спектра мод, вовлеченных в формирование рельефа поверхности капли. Так, при начальном возбуждении m-й моды в первом порядке малости возбуждается только m-я мода, во втором все четные с номерами от 0-й до моды с номером $2m$ включительно. В третьем же порядке малости, если m – четно, то возбуждаются четные моды от 0-й до моды с номером $3m$ включительно, если же m – нечетно, то в третьем порядке малости возбуждаются все нечетные от 1-й до моды с номером $3m$ включительно.

Наличие поправок к частотам приводит к изменению критических условий реализации неустойчивости m-й моды по отношению к собственному заряду капли, в линейном приближении полученных Рэлеем [10]. По мере увеличения заряда капли (параметра W) квадрат частоты m-й моды снижается согласно (2) и при некотором значении обращается в нуль. Дальнейшее увеличение заряда приводит к тому, что квадрат частоты становится отрицательным, а сама частота мнимой. При этом амплитуда m-й моды начинает экспоненциально нарастать со временем, то есть мода становится неустойчивой. Критическое условие реализации неустойчивости m-й моды с учетом нелинейной поправки можно записать в виде

$$(\omega_m + \varepsilon^2 \cdot b_m)^2 \cong \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 \cdot \omega_m \cdot b_m + \mathrm{O}(\varepsilon^4) = 0.$$

Устойчивость капли как целого определится критическими условиями реализации неустойчивости наиболее легко возбуждаемой основной моды: m = 2. На рис. 2 приведены зависимости от параметра W квадрата частоты основной моды капли с учетом нелинейной поправки (кривая *1*) и без ее учета (кривая *2*). Легко видеть, что учет нелинейной поправки к частоте приводит к снижению критического для реализации неустойчивости значения параметра W. При амплитуде начального возмущения основной моды $\varepsilon = 0{,}1 \cdot R$ критическое значение параметра Рэлея равно W_{cr} = 3,85 (напомним, что линейная теория дает для критического значения параметра Рэлея W величину W_{cr} = 4 [10]). Остается отметить, что проведенная оценка снижения критического значения параметра W за счет нелинейного взаимодействия скорее качественная, чем количественная, поскольку при $\varepsilon^2 \cdot b_m \approx \omega_m$ нарушается равномерность разложения (1).

Заключение. Учет поправок третьего порядка малости по амплитуде начального возмущения к амплитудам мод нелинейно-осциллирующей капли идеальной жидкости существенно расширяет спектр нелинейно возбуждающихся мод. Поправки к частотам осцилляций мод, рассчитанные в используемом третьем порядке малости, отрицательны, пропорциональны квадрату амплитуды начального возмущения и растут с увеличением номера моды и собственного заряда капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* Nonlinear oscillation of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 519 – 537.
2. *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* Resonant oscillations of inviscid charged drop // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373 –395.
3. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып.8. С. 45 – 52.
4. *Ширяева С.О.* Асимметрия нелинейного резонансного взаимодействия мод капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76 – 83.
5. *Ширяева С.О.* Нелинейные капиллярные колебания и устойчивость сильно заряженной капли при одномодовой начальной деформации большой амплитуды // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27 – 35.
6. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 163 –174.
7. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып.4. С. 15 – 22.
8. *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* О внутреннем нелинейном четырехмодовом взаимодействии капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75 – 82.
9. *Ширяева С.О.* О внутреннем резонансе мод нелинейно-осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19 – 30.
10. *Rayleigh Lord.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1982. V. 14. P. 184 –186.

Поступила 11.04.03

Summary

At the solution of the problem of a nonlinear axial – symmetric at arbitrary single-mode initial deformation of its equilibrium shape a correction to frequency of oscillation of initially excitated mode, which has the second order of smallness and grows wits the increase of mode number and value of the charge of drop was found. The presence of non-linear correction leads to the decrease of critical conditions of charged drop instability.